ИНФОРМАЦИЈА ГРАВИТАЦИЈЕ

анализа теорије релативности

Растко Вуковић

сирови текст

6. август 2016.

© Архимед Бања Лука, 2016.

Растко Вуковић:
ИНФОРМАЦИЈА ГРАВИТАЦИЈЕ - анализа теорије релативности
© Архимед Бања Лука, 06.08.2016.

Предговор

Ово је део мог тражења информације по физици, на рубовима термодинамике, теорије релативности и квантне механике. Верујем да се у таквим тражењима треба држати принципа да је физика прича без краја. Да је и наука попут уметности, низ покушаја описивања савршенства које треба стално поправљати и дорађивати, који се никада не могу завршити. То ми је била инспирација али и заштита од страха од неуспеха, јер без грешака нема успеха.

Са друге стране (небитно и да се није десило), у овом прилогу износим један крупан пробој у области теорије гравитације. Коначно сам (општу и специјалну) теорију релативности успео свести на *принцип вероватноће*, којим кратко називам просту математичку чињеницу: „најчешће се дешавају највероватнији догађаји“.

То је низ открића која повезују информацију и гравитацију, на која сам наилазио помало ненадано. Било би тешко и помислити, а камо ли надати се успеху, да би се механицистичка физика у коју спада и теорија релативности, могла поставити на стохастичке основе. Оне су идеал детерминизма! Међутим, након завршетка рада на књизи „Информација перцепције“ (в. [3]) постало је јасно да управо теорија релативности нуди јаке доказе за недетерминизам. Али између „тога има“ и „нађено је“ био је дубок јаз.

Након тако (за мене) крупног проналаска, ипак се не могу отети утиску да још увек тапкам на самом почетку горе поменутог пута. Зато је овај текст још увек незваничан и сав је под називом „Прва глава“.

Растко Вуковић, август 2016.

Sadržaj

Увод

Шта рећи о оним општим теорија поља, простора и времена или универзума, које су сан многих великих физичара последњих векова? Покушаји таквих поопштавања су ретко успешни али су и тада надахњујући, покретани раширеним аналогијама и формама математике. Како не приметити ротације Земље око своје осе, око Сунца, ротације Сунца око центра Млечног пута, ротације осталих галаксија, а затим не приметити да се све геометријске трансформације (симетрије) могу представити помоћу ротација. Лоренцове трансформације су такође некакве ротације, а као што ћемо овде (ваљда по први пут) видети како се на такве могу свести и метрички тензори гравитационих поља.

Са друге стране, проблем са оним најопштим истинама је тај што оне не постоје. Исказ „све што кажем је лаж“ - је противречан. Исто је немогућ фризер који „фризира све оне који се не фризирају сами“. Немогућ је „скуп свих скупова“ (Раселов парадокс). Немогућ је „скуп исказа из којих се може добити сваки исказ“ (Геделова теорема о немогућности). Најближа „апсолутној“ истини је математика, а управо она забрањује апсолутну истину!

Проблем са општим истинама је тај што ми и даље верујемо да оне постоје. Ми волимо да верујемо и да је Бог толико свемогућ да „Он може створити тако велики и тежак камен који ни сам не може подићи“. Управо зато што верујемо чак и када не би требали, ми гурамо даље.

Тако некако настају и ове приче. Оне су углавном супстрат неуспелих покушаја, не само у физици, али без којих не бих био у стању разликовати прихватљиво од оног што није, нити тачно од нетачног. Надам се да исто мишљење имају многи, да много грешака лежи на путу до савршенства а да нам и оно што касније прогласимо тачним у почетку често изгледа врло релативно, одбојно. Помислимо само на метод Колмогорова који је открио аксиоме теорије вероватноће на почетку 20. века. Он је случајне догађаје третирао као скупове на начин који је на први поглед неприхватљив, бар за некога ко познаје претходну теорију скупова а њихову нову употребу види први пут.

Свако ко је можда покушавао да теорију релативности постави на сто теорије вероватноће морао се осећати безнадежно као и ја недавно. Теорија релативности је узор детерминизма. Она је сами врх идеја каузалности настајалих појавом класичне механике и једна од најпроверенијих савремених теорија, а опет је у таквом нескладу са идејама квантне механике и њеним проверама. То је разлог зашто сам стално одустајао од овог проблема, па се опет враћао на њега са других „важнијих“ тема. И исплатило се!

Ако будете пажљиво читали овај текст, надам се да ћете видети да он разоткрива да у самој основи основа теорије релативности лежи њена пробабилистичка природа. Извињавам се што га у журби нисам боље сложио.

Glava 1

Теорија релативности

Простор-време Минковског[1] је физички четвородимензионални континуум три димензије простора и једне димензије времена. Идеја да са димензијама простора дода трајање није нова, али ју је тек откриће необичних особина у вези са брзном светлости учинило корисном. Простор Минковског је успешно осмишљен да би био практичан за прецизно описивање кретања, пре свега ради Максвелове[2] теорије електро-магнетизма а затим и ради Ајнштајнове[3] теорије релативности.

За разлику од обичног Еуклидског[4] простора, за који кажемо да има равну метрику јер у њему важи Питагорина теорема[5] (збир квадрата катета једнак је квадрату хипотенузе), у геометрији простор-времена је квадрат хипотенузе једнак разлици квадрата катета. У првом случају, хипотенуза је пут који треба прећи, односно удаљеност две тачке (3-дим) простора, а у другом случају хипотенуза је удаљеност између два (4-дим) догађаја чији квадрат је разлика квадрата тог пута и пута који би прешла светлост за време протекло између датих догађаја. Потреба за овом врстом геометрије, њеном псеудо-метриком, појавила се са открићем специјалне теорије релативности 1905. године.

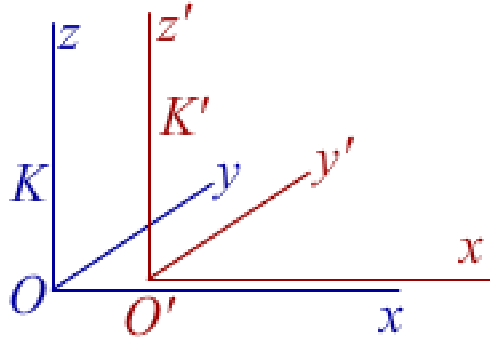
У својој оштој теорији релативности 1916. године, Ајнштајн је одустао и од Еуклидске метрике за просторни део. Због гравитације која успорава време и скраћује јединице дужине по правцу дејства силе, најкраћа 4-дим растојања више нису праве линије у (3-дим) простору. Кретање по тим 4-дим трајекторијама, које називамо и геодезијским линијама, су путање догађаја на којима се не осећа дејство гравитационог поља. За тело које путује по геодезијским линијама кажемо да је у слободном паду у гравитационом пољу, односно да се креће инерцијално.

[1]Hermann Minkowski (1864-1909), немачки математичар.
[2]James Clerk Maxwell (1831-1879), шкотски математичар.
[3]Albert Einstein (1879-1955), немачко-амерички физичар јеврејског порекла.
[4]Euclid of Alexandria (око 300. г. п.н.е.), антички грчки математичар.
[5]Pythagoras of Samos (око 570-495. г.п.н.е.), антички грчки математичар.

1.1 Инерцијално кретање

Инерцијални систем (референце) је онај у којем се не осећа убрзање. У ужем смислу, инерцијални системи су они који су у стању једноликог праволинијског кретања један у односу на други.

Ајштајнов принцип релативности каже да закони физике (механике и електромагнетизма) морају бити исти у свим инерцијалним системима. Посебно, што се наводи и као други принцип, брзина светлости у вакууму, $c = 299\,792\,458$ m/s, има исту вредност у сваком инерцијалном системиму, без обзира на брзину посматрача или брзину извора светлости.



Slika 1.1: Два система у кретању дуж апсциса.

На слици 1.1 су дати K и K', два инерцијална Декартова правоугла система координата $Oxyz$ и $O'x'y'z'$ који се крећу константном брзином v један у односу на други дуж апсциса (x-оса). То је типична ситуација Ајнштајнове специјалне теорије релативности.

Нека су дате две тачке $L_1(x_1, y_1, z_1)$ и $L_2(x_2, y_2, z_2)$, прва у тренутку t_1 а друга у тренутку t_2, све то посматрано само у првом систему. За просторну удаљеност између тачака, применом Питагорине теореме, налазимо

$$(l_2 - l_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2, \tag{1.1}$$

као дијагоналу квадра дате дужине, ширине и висине. То често пишемо

$$(\Delta l)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2, \tag{1.2}$$

када нам је важнија ова формула од појединих тачака.

У случају да су промене Δx, Δy и Δz занемарљиво мале, тј. инфинитезималне, тада је и Δl инфинитезимала, па претходни израз пишемо помоћу диференцијала:

$$(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2. \tag{1.3}$$

Све ово важи и у другом систему, али тада пишемо x', y', z' и l'.

За светлосни сигнал који се креће дуж апсциса брзином c, у првом и другом систему важе једнакости, редом:

$$x - ct = 0, \quad x' - ct' = 0, \tag{1.4}$$

$$x' - ct' = \lambda(x - ct), \quad \lambda = \text{const.} \tag{1.5}$$

Слично, за светлосни сигнал који се креће у супротном смеру, важи:

$$x' + ct' = \mu(x + ct), \quad \mu = \text{const.} \tag{1.6}$$

Сабирајући и одузимајући претходне једнакости и уводећи смену:

$$a = \frac{\lambda + \mu}{2}, \quad b = \frac{\lambda - \mu}{2}, \tag{1.7}$$

налазимо:

$$\begin{cases} x' = \gamma x - \eta ct, \\ ct' = \gamma ct - \eta x. \end{cases} \tag{1.8}$$

Коефицијенте γ и η ћемо одредити постављањем почетних услова.

Нека је за исходиште система K' стално важи $x' = 0$. Према првој од једначина је:

$$x = \frac{\eta c}{\gamma} t \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\eta c}{\gamma}, \quad \frac{v}{c} = \frac{\eta}{\gamma}, \tag{1.9}$$

јер се исходиште K' креће релативно у односу на K брзином v.

Принцип релативности каже да гледано из K штап јединичне дужине који мирује у систему K' мора бити исте дужине као штап јединичне дужине који мирује у K а посматран из K'. Тада, умећући време $t = 0$ у горњу једначину, добијамо $x' = ax$, односно

$$\Delta x = \frac{1}{\gamma}, \tag{1.10}$$

где је стављен јединични пут $x' = 1$ а Δx је износ померања у првом систему док светлост пређе дати пут у другом. Обратно, ако се мери из K' стављајући $t' = 0$ и елиминишемо t из једначина (1.8), добијамо

$$x' = \gamma\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)x. \tag{1.11}$$

Стављајући $x = 1$ добијамо да је x' јединична дужина (у мировању) из првог система виђена из другог. Међутим, то важи и обрнуто, па према (1.10) добијамо

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \eta = \frac{\gamma v}{c}. \tag{1.12}$$

Према томе, трансформације координата датих инерцијалних система су:

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad ct' = \gamma(t - \frac{v}{c}x). \tag{1.13}$$

Називамо их Лоренцовима, према аутору који их је први извео (из Максвелових једначина). Посматрано из система K' у односу на који се први систем креће супротном брзином, $-v$, слично налазимо:

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad y = y', \quad z = z', \quad ct = \gamma(t' + \frac{v}{c}x'). \tag{1.14}$$

Исто добијамо заменом v са $-v$ у (1.13).

Сабирајући квадрате координата (1.13), лако налазимо:

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - (ct')^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2. \tag{1.15}$$

Када Лоренцове трансформације применимо на два догађаја $k = 1, 2$ из једног система, које затим трансформишемо у други, добијамо:

$$\begin{cases} (x_k, y_k, z_k, ct_k) & \Delta\xi = \xi_2 - \xi_1 \quad \xi = x, y, z, ct, \\ (x'_k, y'_k, z'_k, ct'_k) & \Delta\xi' = \xi'_2 - \xi_1 \quad \xi' = x', y', z', ct', \end{cases}$$

а отуда и из (1.15) следи $(\Delta s)^2 = (\Delta s)^2)$, где је:

$$\begin{cases} (\Delta s')^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 - (c\Delta t')^2, \\ (\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (c\Delta t)^2. \end{cases} \tag{1.16}$$

Ово Δs је Лоренцов интервал простор-времена. То је уопштење Питагорине теореме са Еуклидских на псеудо-еуклидски простор Минковског. Прелазећи са једног на други инерцијални систем, координате се мењају према Лоренцовим трансформацијама, али овај интервал остаје исти.

У следећим примерима дата су два инерцијална система K и K' који се узајамно крећу једнолико праволинијски дуж апсциса, као у претходном тексту. Брзина система K' у односу на K је v, а брзина система K у односу на K' је $-v$.

Пример 1.1.1. *Штап лежи на правцу кретања датих инерцијалних система и мирује у једном од њих. Показати да посматрачи који мирују у ова два система виде дужину истог штапа Δl_0 и Δl:*

$$\Delta l = \Delta l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \tag{1.17}$$

при чему је Δl_0 дужина за посматрача који мирује у односу на штап.

Решење. То следи непосредно из (1.10). □

Претходна формула је позната као релативистичка контракција дужина. Она се често наводи у пару са следећом која представља релативистичку дилатацију времена.

Пример 1.1.2. *Инерцијални системи имају свој (тачан) сат. Показати да док сат из једног од система за посматрача из тог система покаже протекло време* Δt_0*, сат из другог покаже време* Δt*, тако да важи:*

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{1.18}$$

Дакле, сат у кретању иде спорије.

Решење. То можемо доказати помоћу интервала (1.16):

$$(\Delta l)^2 - c^2(\Delta t)^2 = (\Delta l')^2 - c^2(\Delta t')^2.$$

Ако сат мирује у систему K' биће $\Delta l' = 0$ па је зато $\Delta t' = \Delta t_0$ и $\Delta l/\Delta t = v$, те:

$$(v\Delta t)^2 - c^2(\Delta t)^2 = -c^2(\Delta t_0)^2,$$

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(\Delta t)^2 = (\Delta t_0)^2,$$

а отуда тражена једнакост. □

Због успоравања времена покретног у односу на непокретни систем, појам истовремености је релативан. Када се инерцијални системи приближавају, посматрачи који мирују у исходиштима налазе се у будућностима један дргугог, у тренутку мимоилажења они су истовремени, а када се удаљавају одлазе један другоме у прошлост.

Према томе, како садашњост тако су физички реалне и прошлост и будућност инерцијалних система, све док можемо сматрати реалним све оно што је објективно за делове физичког света који нас окружује[6]. Закључак је да су инерцијаним системима довољне четири димензије простор-времена, односно да би свет морао бити детерминистички уређен када би постојали само инерцијални системи.

До истог закључка дођи ћемо помоћу Урисонове[7] дефиниције димензије. То је следећа индуктивна тополошка дефиниција.

Дефиниција 1.1.3. *Тачка и коначни скуп тачака имају димензију нула. Ако се околина неке тачке датог скупа тачака може одвојити од остатка скупа подскупом димензије* $n = 0, 1, 2, 3, \dots$*, онда је дати скуп димензије* $n + 1$*, а ако не може он је веће димензије.*

Права линија се може поделити на две полуправе једном тачком. Део кружнице можемо одвојити од остатка кружнице помоћу две тачке. Тачку у којој се сече коначно много правих (коначни сноп правих) можемо изоловати од остатка тих правих са коначно много тачака, по две на свакој правој снопа тако да је тачка

[6] Ово је мој закључак и можете га узети са резервом. Исто и наставак.
[7] Павела Урисон (1898-1924), руско-украјински математичар јеврејског порекла.

пресека између њих. Такође, крива линија нацртана на седластој површи може се поделити помоћу неколико тачака. Према Урисоновој дефиницији, све ови скупови (линије) су димензије један.

Раван можемо делити правим линијама. Тачку сфере и њену околину можемо изоловати од осталих тачка сфере кружницом. Тачку на седластој површи такође можемо изоловати од остатка те површи помоћу затворене линије около. Зато су све ове површи димензије два.

Простор је димензије три, јер једну тачку простора заједно са њеном околином можемо затворити у сферу која је димензије два.

Простор-време Минковског је димензије четири, када се односи само на инерцијалне системе, јер је у сваком инерцијалном систему могуће (посебна) синхронизација сатова. Синхронизација сатова датог система значи дефинисање садашњости унутар тог система, која представља сав 3-дим простор у једном тренутку, којом се потпуно одваја прошлост од будућности система. О овоме сам већ писао (в. [2], секција 4. Димензије), али морам опет, јер још увек не могу да нађем ништа слично код осталих аутора.

Подсећам, два су начина на која можемо синхронизовати удаљене часовнике:

1. Ускладимо их када су један поред другог а затим их полако, веома полако раздвајамо, тако да је дилатација времена занемарљива.

2. Можемо послати зраку светлости од једног сата до другог. Рецимо да из првог сата на којем је очитано време t_1 пошаљемо сигнал до другог и назад, при чему је на другом сату (посматрач са првог сата) очитао време t_2, а у повратку сигнала време t_3. Сатови су синхронизовани ако је

$$t_2 = \frac{t_1 + t_3}{2}, \tag{1.19}$$

тј. када је t_2 средња вредност времена t_1 и t_3.

Новост је тврђење да могућност синхронизације сатова унутар инерцијалног система затвара тај систем у 4-дим простор-време. За отворање простор-времена ка додатним димензијама треба нам бар дејство сила. То следи из дефиниције инерцијалног система и чињенице да је сила та која телу даје убрзање.

Са друге стране, помоћу дефиниције 1.1.3 можемо показати да реално простор-време има више од четири димензије. Било каква ограда која има само три просторне димензије траје један или коначно много момената и ништа више. Она не може да огради догађај (дато место у датом тренутку) од остатка света, јер већ у следећем тренутку такве ограде нема. Зато реално простор-време има бар пет димензија.

Да бисмо помоћу те дефиниције показали да простор-време има бар 6 димензија, потребна је рецимо претпоставка о неминовности ерозије. Зидови затворске ћелије се праве од 3-дим материјала који траје, па можемо рећи да они представљају 4-дим ограничење догађаја (место плус тренутак) у ћелији. Међутим, ако је пропадање зидова временом неминовност, онда је реални свет има више од 5 димензија.

Како поменута ерозија наглашава недетерминизам, то можемо претпоставити да је она у некој вези и са стохастичком природом света и са физичким силама.

1.2 Општа релативност

Коваријантност физичког закона значи да једначина која га описује има исти облик у свим координатним или референтним системима. Величине које се могу понашати коваријантно су тензори, а међу њима и вектори. Ајнштајн је радећи са тензорима и покушавајући да поопшти специјалну теорију релативности формирао следећи *принцип опште релативности* као свој циљ.

Дефиниција 1.2.1. *Општи закони природе требају бити изражени једначинама које се добро држе у свим системима координата, тј. су коваријантни у односу на било коју супституцију (генерално су коваријантни).*

У свом првом раду[8] са тензорима, којег је писао заједно са Гросманом[9] Ајнштајн је увео произвољну координатну трансформацију са захтевом да материјална тачка задовољава услов

$$\delta \int ds = 0. \tag{1.20}$$

где је $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$. Напоменуо је да су g_{ij} компоненте метричког тензора простор-времена са којима гради тражену коваријантност. Ајнштајн и Гросман су истраживали једначине поља облика

$$\Lambda_{ij} = KT_{ij}, \tag{1.21}$$

где су T_{ij} коваријантне компоненте тензора енергије. Три захтева су постављали за Λ_{ij}: (1) то морају бити компоненте тензора другог реда, (2) он је генерално коваријантан, (3) мора бити такав да у граничном случају даје Њутнов[10] закон, да се други услов за слаба поља своди на на Поисонову[11] једначину

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho, \tag{1.22}$$

где је ϕ Њутнов скаларни потенцијал, $G = 6,674\cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2$ је Њутнова константа гравитације, а ρ је густина масе. Како је то напомињао Гросман, природан кандидат за Λ_{ij} био је Ричијев[12] тензор R_{ij}. Али тада се јављају проблеми једначине (1.21) са њеним свођењем на Њутнов потенцијал (1.22).

У писму Бесоу[13] датираном 10. децембра 1915. године, Ајнштајн каже да су он и Гросман одбацили (1.21) не само због тешкоћа око свођења на Њутнов закон, већ и због тешкоћа са законом одржања. Мало пре тог писма, Ајнштајн је већ објавио[14] данас своје чувене једначине гравитационог поља:

$$R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ij}, \tag{1.23}$$

[8] Entwurf einer verallgemeinerten Relativitäitstheorie, 1903.

[9] Marcel Grossmann (1878-1936), мађарски математичар, Ајнштајнов школски друг.

[10] Isaac Newton (1642-1727), енглески математичар.

[11] Siméon Denis Poisson (1781-1840), француски математичар.

[12] Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925), италијански математичар.

[13] Michele Besso (1873-1955), швајцарско-италијански инжењер јеврејског порекла.

[14] Einstein, Albert (November 25, 1915). “Die Feldgleichungen der Gravitation”. Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin: 844–847. Retrieved 2006-09-12.

То је систем од десет једначина где је $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ тзв. Ричијев скалар, али поред којих се закон одржања мора посебно постулирати.

Ајнштајн-Гросманове једначине гравитације (1.23) нису задовољиле ауторе по питању коваријантности. Ајшштајнов главни аргумент против најављеног принципа на крају је био да би прихватање коваријантности значило одустајање од принципа детерминизма. Опште коваријантне једначине би нарушиле каузалност, којој је он био склон.

Ајнштајн је сматрао да ове једначине имају још неких принципијелних слабости, попут могућности колапса Свемира због привлачне силе гравитације којој није имало шта да се супротстави. Зато је он убрзо објавио побољшање у облику:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} + \Lambda g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}, \tag{1.24}$$

где је Λ непозната *космолошка константа*, да би се убрзо приметило да је то такав статични Свемир који не може бити стабилан. Када је Хабл[15] установио ширење универзума у раду објављеном 1927. године, претпостављајући да би оно могло настати неком почетном експлозијом универзума (*Big beng*) због које би „разлетање" морало успоравати а затим можда прећи и у скупљање, Ајнштајну параметар ламбда није више требао и он је опозвао последње једначине сматрајући их својом грешком. Оне су опет постале актуелне више од пола века касније, након сазнања да се Свемир шири али не успорава, већ убрзава. Једне или друге једначине, (1.23) или (1.24), пишемо кратко

$$G_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}, \tag{1.25}$$

где G_{ij} називамо Ајнштајнов тензор. Једначине (1.25) су дефиниција онога што називамо „Општом теоријом релативности".

Ајнштајнове једначине поља (1.25), због индекса i и j који показују на све четири координате простор-времена, дефинишу $4 \times 4 = 16$ комбинација једначина. Шест од тих једначина су дупликати, тако да је то систем од 10 парцијалних нелинеарних диференцијалних једначина другог реда. Леве стране тих једначина односе се на кривине простор-времена, десне на масе, енергије и импулсе. Кратко речено, маса (десно) каже простор-времену како ће бити закривљен, а закривљеност (лево) каже маси како ће се кретати. Пре него што уђемо у детаље, покушајмо ту повезаност објаснити простијим речима.

Закривљеност простора можемо приближно разумети помоћу површине сфере. Земља је рецимо лопта са великом кружницом - екватором. Замислимо да два путника крену са екватора ка северном полу крећући се по површини Земље. У почетном тренутку они би се кретали паралелно један у односу на другог, да би се на крају на северу сударили. Они су се кретали најкраћим путањама између парова тачака којим су пролазили, али су ипак из паралелног кретања дошли до укрштеног. Помислили бисмо да их је нека сила привлачила и довела до судара, а опет знамо да то није. Кривине простора око Земље су много блаже од поменутог

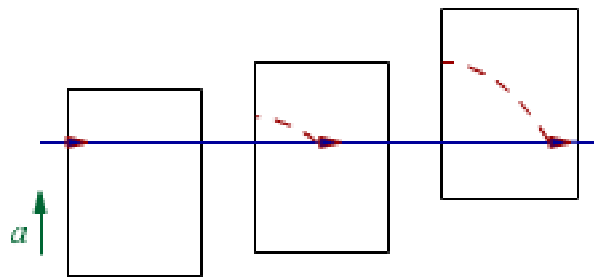
[15] Edwin Hubble (1889-1953), амерички астроном.

и другачије због димензије времена, а још мање личе на параболичну путању косог хитца, али овај пример ипак помаже у замишљању улоге не-еуклидских геометрија у тумачењу гравитације.

Тело у слободном паду у гравитационом пољу не осећа дејство гравитационе силе. Према претходној дефиницији, таквом телу можемо приписати неки локолни инерцијални систем и рећи да се оно налази у *инерцијалном кретању*. Међутим, за разлику од узајамног једноликог праволинијског кретања из специјалне теорије релативности, сада нема смисла говорити о узајамним брзинама оваквих тела, осим када се она налазе на истом месту.

У складу са коментаром на крају претходне секције, сада приметимо да се ова локална инерцијалност може миц-по-миц премештати по целом гравитационом пољу при чему је на свакој тачки (3-дим) простора могуће имати материјалне тачке у слободном паду, али различитим брзинама. Тако дефинисано простор-време поља гравитације има четири димензије. Друго је питање шта ако је материјална тачка заустављена, као тело на површини земље, или када на неки други начин осећа гравитациону силу па више није у инерцијалном систему.

Принцип еквиваленције инерцијалне и гравитационе масе каже да нема физичких разлика између тела које би било убрзавано у простору без гравитације и онога које би се налазило у гравитационом пољу са истим убрзањем. То се односи на материјалне тачке са малим (инфинитезималним) околинама, али за појашњење може помоћи и пример са лифтом (слика 1.2) који је смислио Ајнштајн. Лифт је у бестежинском простору, али се креће на горе сталним убрзањем $a = 9,81\ \mathrm{m/s^2}$. Како је ово убрзање једнако убрзању Земљине теже, то физичар у лифту неће приметити било какву разлику природних закона унутар тог лифта и оног који би мировао на површини Земље.



Slika 1.2: Ајнштајнов лифт.

Доследно, гравитационо поље мора закривљивати путању светлости која би ушла на један прозор лифта, као што се види на три дате сличице. Светлост (плава линија) се креће равно са лева у десно, али лифт иде убрзано горе, па се путања светлости у лифту види закривљеном (црвена испрекидана). Према Њутновом закону гравитације

$$\mathbf{F} = G\frac{Mm}{r^2}, \tag{1.26}$$

где је $M = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg маса Земље, $m = 0$ маса светлости, а $r = 6,37 \cdot 10^6$ m

полупречник Земље, то би било немогуће. Ово скретање светлости у гравитационом пољу је потврђено посматрањем помрачења Сунца 1919. године. Исту појаву би објашњавало и признавање неке (веома мале) масе светлости.

Независно од тога где је поменути лифт, обично или гравитационо убрзање ће мењати вероватноће распоређивања[16] молекула гаса и променити *ентропију*. Као што знамо из термодинамике, спонтани раст ентропије, прелазак топлоте са топлијег на хладније тело, настаје због тежње молекула да заузму највероватније положаје. За разлику од собе у бестежинском стању где је највероватније једнолико распоређивање честица гаса по целој соби, у присуству Земљине теже доњи положаји ће бити мало вероватнији. То значи да унутар собе на земљи, за тело које мирује и тело у слободном паду, нису једнаке вероватноће исхода физичких догађаја. Томе је доследно рећи да се таква два тела, два физичка система у сличним условима, могу развијати у другачије реалности. Они су окружени мало другачијим особинама наводно истог простор-времена.

Вратимо се поново на Ајнштајнове једначине поља (1.25) и напишимо их у следећој познатој поједностављеној интерпретацији

$$\left.\frac{\ddot{V}}{V}\right|_{t=0} = -4\pi G[\rho + \frac{1}{c^2}(P_x + P_y + P_z)]. \qquad (1.27)$$

На левој страни је „специфично убрзање промене запремине“ у тренутку $t = 0$, рецимо лопте сачињене од неких честица, где је $V(t)$ њена запремина у тренутку t, а $\ddot{V}(t)$ је други извод те запремине по времену. На десној страни, компонента тензора енергије-импулса (*stress-energy tensor*) T_{ij} показује колико импулса у правцу i одлази у правцу j на датом месту простор-времена, када су индекси $i, j \in \{x, y, z, t\}$. При томе је ток t-импулса у t-правцу просто густина енергије ρ. Ток x-импулса у x-правцу је „притисак на x-правац“ означен са P_x, а слично за y и z. У многим текстовима се Ајнштајнове једначине објашњавају на овај начин када се за пример узима идеалан гас.

Негативни предзнак (1.27) показује да са порастом (иначе позитивних) вредности компоненти густине и импулса гравитација смањује запремину, привлачи честице. Међутим, гравитациона константа G је релативно мали број због чега је тај ефекат релативно слаб, а нарочито је слаб за три сабирка P_k са $k = x, y, z$, јер су додатно подељени огромним бројем c^2. Према томе, Ајнштајнова гравитација стишће тела и бочно у односу на правац силе - ефекат који је веома мали за слаба гравитациона поља попут Земљиног. Зато га је било тешко приметити.

Нека је $V(t)$ мала лоптаста запремина материје, рецимо једна кап, чије честице узајамно мирују у слободном паду у гравитационом пољу. У вакуму нема густине енергије или притиска, па је $\ddot{V}\big|_{t=0} = 0$ али кривина простор-времена још увек може да деформише ту лопту. Честице ближе Земљи више убрзавају, због чега се лопта развлачи по вертикали. Међутим, све честице убрзавају по тој линији па лопта стижући их бива стискана и по хоризонталним правцима. Ајнштајнове једначине

[16] ово је нетипичан коментар

кажу да ће се ова два ефекта поништавати када израчунамо други извод запремине. То истезање-стискање лопте (капљице која пада у вакууму) је пример онога што називамо силама плиме и осеке. Слично подизању и пропадању површине мора на Земљи због привлачне силе Месеца.

Следећи пример закривљавања простор-времена су гравитациони таласи. Општа теорија предвиђа да се сваки тешки објекат мрда, пулсира шаљући валове набора простор-времена који се шире брзином светлости. Хулсе и Тејлор су добили Нобелову награду за физику[17] 1993. године за пажљиву анализу бинарних неутронских звезда током њиховог спиралног урушавања, када су за губитке енергије због гравитационог зрачења добили тачно оне резултате које предвиђа теорија релативности.

У неутронским звездама густина енергије и притисак на десној страни Ајнштајнове једначине дају сличне вредности. Штавише, за масе веће од два Сунца, неротирајуће неутронске звезде неизбежно колабирају у црну рупу, управо захваљујући ефектима бочног притиска (ка унутра). Уопште, било који објекат масе M формираће црну рупу када је стиснут на полупречник мањи од

$$r_s = 2GM/c^2. \tag{1.28}$$

Тај се полупречник назива Шварцшилдов[18] према аутору који је нашао прва решења Ајнштајнових једначина у облику:

$$(ds)^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}(dr)^2 + r^2[(d\theta)^2 + \sin^2\theta\,(d\varphi)^2] - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)(cdt)^2, \tag{1.29}$$

за догађај у сферним координатама $Or\varphi\theta$ простора. Овде је r удаљеност дате тачке од исходишта O у којем се налази центар гравитационе масе, φ је лонгитуда (у радијанима), θ је колатитуда (угао од севера), а r_s је полупречник (1.28).

Шварцшилд је био први који је извео израз за метрику (1.29) из Ајнштајнових једначина поља (1.25) а на основу његовог резултата су убрзо уследиле успешне експерименталне потврде опште теорије релативности. То је метрика за централно симетрично гравитационо поље, попут Сунчевог система, или Земље. Његово решење је на известан начин и опште, јер се свако гравитационо поље може разумети као унија таквих (која производе мања тела).

То су основе Ајнштајнове опште теорије релативности, овде препричане укратко и популарно колико је то уопште могуће са тако сложеном математичко-физичком теоријом. Ради комплетирања описа погледајмо и неке критике.

Пре свега, општа теорија релативности је претендовала да буде општа теорија космоса и у томе није успела. Ајнштајнове једначине поља (1.25) су замишљене да буду универзалне за цео свемир[19], али горе наведена особина „стискања“ им је дала природу гравитације која не може бити одбојна сила. Након открића и потврда у 21. веку да се галаксије разилазе са убрзањем, таква теорија је неизбежно остала локална. Томе додајмо да до данас немамо очекиваног јединственог принципа и

[17] The Nobel Prize: `http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1993/`
[18] Karl Schwarzschild (1873-1916), немачки физичар.
[19] Космос, свемир и универзум су овде синоними.

једначина електро-магнетних сила и гравитације. Открића и развој слабих и јаких нуклеарних сила нас још даље одводе од тог циља, а суштинске разлике између основа квантне механике и Ајнштајнових надзора[20] су све веће. Ипак, не треба заборавити да Ајнштајнова теорија много тачније описује физичку реалност него њој претходне.

Оне примедбе о Ајнштајновом лифту (слика 1.2) које сам могао наћи у уџбеницима физике, или на интернету, углавном се своде на чињеницу да је гравитациона сила[21] у соби на Земљи слабија на плафону, него на поду. Заједно са силом опада и гравитационо убрзање, што се у лифту (ван поља) који убрзава неће десити. Међутим, та критика се лако оспори ако говоримо о веома малим, инфинитезималним лифтовима.

Следећа критика се ређе[22] спомиње. Све делове собе која мирује на тлу привлачи сила из једног центра и зато парови наспрамних зидова који бивају вучени на доле притискани су и један ка другоме. Слично повлачење конопаца стеже куполу отвореног падобрана (слика 1.3). То значи да имамо исти ефекат бочног стискања, не само једначина (1.27) већ и Њутновог тумачења гравитације на Земљи. Међутим, то не очекујемо и у Ајнштајновом лифту са константним праволинијским убрзањем. Да ли то онда значи да морамо сумњати и у принцип еквиваленције? Да ли то значи да се Шварцшилдова метрика не може добити из Ајнштајновог лифта?



Slika 1.3: Падобран

Други начин за анализу Ајнштајнових једначина (1.25) је анализа Шварцшилдове метрике (1.29). Обзиром на централно симетричну природу поља, та је метрика писана у сферним координатама, које у равном простору ($r \to \infty$) гласе

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2 - c^2 dt^2, \tag{1.30}$$

где смо ставили $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2$. Инфинитезимално померање dr је по правцу који иде кроз центар гравитације који је у исходишту O координатног система, а $rd\Omega$ је померање по великим кружницама сфера полупречника r.

Приметимо да је интервал (1.30) еквивалентан инфинитезималном облику (1.16). Када смо изван гравитационог поља, када је поље веома слабо, тада Шварцшилдов интервал постаје Лоренцов. У Шварцшилдовом пољу се овај интервал мења само по правцу само по правцу дејства гравитационе силе, а у Лоренцовом само по правцу

[20]На пример, стохастичка природа квантне физике, или квантна спрегнутост.
[21]Сила теже опада са квадратом удаљености од центра Земље.
[22]Заправо не знам да ли се спомиње уопште.

кретања. Даље, ради једноставности, можемо посматрати само онај део интервала који се мења.

Пример 1.2.2. *Посматрач у гравитационом пољу мери дужину dr_0 ка центру поља и временски период dt_0. Показати да за посматрача изван поља ($r \to \infty$) те вредности износе, редом:*

$$dr = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dr_0, \quad dt = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dt_0, \tag{1.31}$$

где је r_s Шварцшилдов полупречник (1.28), а r је удаљеност посматрача у пољу од центра поља.

Решење. Означимо са dr' и dt' дужину у правцу центра поља и време за посматрача далеко од поља. Из једнакости интервала $ds^2 = ds'^2$, следи

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 = dr'^2 - c^2 dt'^2.$$

Када меримо дужину узимамо да је протекло време нула, а када меримо време меримо га на сату који се не помера. У првом случају је $dt = dt' = 0$, а $dr' = dr_0$ је стварна дужина, па добијамо

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr = dr'^2,$$

а отуда прва тражена једнакост. У другом случају је $dr = dr' = 0$, а $dt' = dt_0$ је стварно протекло време, па добијамо

$$-\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 = -c^2 dt'^2,$$

а отуда друга тражена једнакост, ако је брзина светлости иста у оба система. □

Видели смо да гравитационо поље скупља дужине (само оне у правцу поља) и успорава време, са становишта посматрачи који мирују у односу на поље. Оба израза (1.31), за контракцију дужине и дилетацију времена, зависе само од количника:

$$\kappa^2 = \frac{r_s}{r}. \tag{1.32}$$

Приметимо да ови резултати веома подсећају на контракцију и дилатацију из специјалне теорије релативности, где би уместо κ било $\beta = v/c$. Отуда питање, да ли постоје неке трансформације координата аналогне Лоренцовим које, у гравитационом пољу, дају резултате (1.31)?

Теорема 1.2.3. *За трансформације координата*

$$\begin{cases} dr = \chi\, dr_0 + i\sqrt{1 - \kappa^2 - \chi^2}\, cdt_0, & i = \sqrt{-1}, \\ cdt = i\frac{\sqrt{1-\kappa^2-\chi^2}}{1-\kappa^2}\, dr_0 + \frac{\chi}{1-\kappa^2}\, cdt_0, & \chi \in \mathbb{C}, \end{cases} \tag{1.33}$$

важи једнакост интервала

$$\frac{dr^2}{1-\kappa^2} - (1-\kappa^2)\, c^2 dt^2 = dr_0^2 - c^2 dt_0^2. \tag{1.34}$$

То су најопштије такве трансформације.

Доказ. Полазимо од израза на левој страни (1.34) и добијамо, редом:

$$\frac{dr^2}{1-\beta^2} - (1-\beta^2)\, c^2 dt^2 =$$

$$= \frac{1}{1-\kappa^2}\left[\chi^2\, dr_0^2 + 2i\chi\sqrt{1-\kappa^2-\chi^2}\, dr_0\, cdt_0 - (1-\kappa^2-\chi^2)\, c^2 dt^2\right]$$

$$-(1-\kappa^2)\left[-\frac{1-\kappa^2-\chi^2}{(1-\kappa^2)^2}\, dr_0^2 + 2i\frac{\chi\sqrt{1-\kappa^2-\chi^2}}{(1-\kappa^2)^2}\, dr_0\, cdt_0 + \frac{\chi^2}{(1-\kappa^2)^2}\, c^2 dt_0^2\right]$$

$$= dr_0^2 - c^2 dt_0^2.$$

Према томе, важи први део тврђења.

Други део тврђења доказујемо полазећи од општих трансформација

$$\begin{cases} dr = \alpha_{rr}\, dr_0 + \alpha_{rt}\, cdt_0, \\ cdt = \alpha_{tr}\, dr_0 + \alpha_{tt}\, cdt_0, \end{cases}$$

где су $\alpha_{\mu\nu}$ непознате функције параметра κ. Након квадрирања и уврштавања у (1.34) налазимо[23] опште решење облика (1.33), при чему је χ произвољно. □

Изван гравитационог поља, када $r \to \infty$, тада $\kappa \to 0$, једначине (1.33) постају

$$\begin{cases} dr = \chi\, dr_0 + i\sqrt{1-\chi^2}\, cdt_0, & i = \sqrt{-1}, \\ cdt = i\sqrt{1-\chi^2}\, dr_0 + \chi\, cdt_0, & \chi \in \mathbb{C}. \end{cases} \tag{1.35}$$

Стављајући

$$\chi = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.36}$$

трансформације (1.35) постају Лоренцове (1.13), где је апсциса r.

Када расте јачина гравитационог поља, тада расте $\kappa > 0$, а (1.33) представљу трансформације у којима расте отклон реалних оса (дужине dr_0 и времена cdt_0) према имагинарним (dr и cdt). Први и други пар оса се узајамно понашају као да нису у истом реалном простору, али сваки од та два пара за себе се понаша као да јесте. То нам говори да и Ајнштајново гравитационо поље формално можемо разумети као 4-димензионално простор-време закривљено у неком континууму са више од 4 димензије.

[23] Детаље ових решавања имате у мојим радовима уназад пар година.

1.3 Коваријантна алтернатива

Полазећи од Њутновог закона, ставимо центар масе M у исходиште, а тело масе m нека је у слободном паду[24],. Падање тела масе m производи рад (гравитационе силе тела M) који се претвара у кинетичку енергију па маса m расте. Према принципу еквиваленције, порастом масе расте и јачина гравитационе силе. Нека на путу dr маса порасте за dm. Тада имамо:

$$dmc^2 = -\frac{GMm}{r^2}dr,$$

$$\frac{dm}{m} = -\frac{GM}{r^2c^2}dr,$$

$$\ln m = \frac{GM}{rc^2} + \text{const.}$$

$$m = m_0 e^{GM/rc^2}, \tag{1.37}$$

где би маса тела које пада била m_0 у одсуству гравитације.

Ова једначина важи за гравитациона поља где је маса M много већа од m, тако да је можемо поставити у центар и имати инерцијалне системе. Када је убрзање већег тела занемарљиво у односу на убрзање мањег. Маса фотона је $\hbar\omega/c^2$, а нека је фреквенција светлости у бесконачности ω_0. Док светлост путује у гравитационом пољу, према претходној једначини, њена фреквенција је $\omega = \omega_0 e^{GM/rc^2}$. Слично, ако је ω_0 фреквенција светлости на површини звезде полупречника R она постаје

$$\omega = \omega_0 e^{-GM/Rc^2} \approx \omega_0 (1 - \frac{GM}{Rc^2}). \tag{1.38}$$

Наиме, развој експоненцијалне функције e^x у Маклоренов ред даје

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \approx 1 + x, \tag{1.39}$$

за мало $x \approx 0$. Тако (1.39) постаје познати гравитациони црвени помак.

Израз за Њутнов гравитациони потенцијал је $-GM/r$. Потенцијална енергија тела једнака је негативној вредности рада насталог деловањем гравитационог поља док тело пада из бесконачности. Отуда:

$$E_p = -\int_\infty^r -\frac{GMm}{r^2}\,dr = \int_\infty^r \frac{GMm_0}{r^2} e^{GM/rc^2}\,dr,$$

$$E_p = m_0 c^2 \left(1 - e^{GM/rc^2}\right), \tag{1.40}$$

па је статични гравитациони потенцијал $c^2\left(1 - e^{GM/rc^2}\right)$.

[24] Hai-Long Zhao: Lorentz-Covariant Theory of Gravity Founded on Inertial Frame of Center of Mass, Dec 2005

У гравитационим пољем не можемо синхронизовати сатове као у специјалној релативности, али у бесконачности, где утицаја гравитационог поља нема, имамо један инерцијални систем референције. Нека се низ осцилација таласа светлости простире од бесконачности до r од центра, са фреквенцијом ω_0 у бесконачности и трајањем једне осцилације $\Delta t = 2\pi/\omega_0$. Мерено локално, сатом у гравитационом пољу, протекло време такође је Δt, јер су одлагања потребна за две фазе таласа (које путују од ∞ до r) једнака.

Међутим, гравитација делује на фреквенцију светлости. То се види из претходног, да се локална фреквенција светлости мења у односу на бесконачност. Са удаљеног инерцијаног система гледано, локална фреквенција постаје $\omega_0 e^{GM/rc^2}$, а локално трајање једне фазе таласа $\Delta t\, e^{-GM/rc^2}$. Како је временски интервал мерен локално Δt, то локални сат успорава у односу на сат у бесконачности. Да бисмо добили време у бесконачности морамо множити локално време са фактором e^{-GM/kc^2}.

Слично дилатацији времена, помоћу фреквенција светлости можемо израчунати и контракцију дужина у присуству гравитационог поља. Нека је таласна дужина светлости у бесконачности λ_0 а растојање које она пређе за јединично време $n\lambda_0$. Док се приближава удаљености r, она још увек прави n осцилација у јединици времена. Али како се локална фреквенција повећава, локална таласна дужина постаје $\lambda_0 e^{-GM/rc^2}$ посматрана из бесконачности, а растојање које талас пређе за јединицу времена $n\lambda_0 e^{-GM/rc^2}$. Дужина је растојање које светлост пређе за дато време. Упоређена са дужином у бесконачности, локална дужина се скраћује. Да би је свели на дужину у бесконачности, локалну дужину (у правцу извора поља) морамо множити са фактором e^{GM/rc^2}.

Другим ознакама, ако су за посматрача у гравитационом пољу дужина (у правцу поља) и време Δr_0 и Δt_0, онда ће их посматрач изван гравитационог поља вредновати са Δr и Δt, при чему је:

$$\Delta r = \Delta r_0 \exp\left(-\frac{GM}{rc^2}\right), \quad \Delta t = \Delta t_0 \exp\left(\frac{GM}{rc^2}\right). \tag{1.41}$$

То су изрази за контракцију дужина (у правцу гравитационог поља) и дилатацију времена који се за слабија поља (мало M или велико r). За слабија поља, апроксимацијом (1.40) сводимо их на:

$$\Delta r = \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)\Delta r_0, \quad \Delta t = \left(1 + \frac{GM}{rc^2}\right)\Delta t_0. \tag{1.42}$$

Користећи ознаку за Шварцшилдов полупречник (1,28), можемо писати:

$$\Delta r = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\Delta r_0, \quad \Delta t = \left(1 + \frac{r_s}{r}\right)\Delta t_0, \tag{1.43}$$

а то без смањења тачности може писати и у облику (1.31).

Ефекти контракције дужина и дилетације времена мењају равну метрику простор-времена у

$$ds^2 = e^{2GM/rc^2}\, dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 - e^{-2GM/rc^2}\, c^2 dt^2. \tag{1.44}$$

Апроксимацијом (1.40), овај израз постаје

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2\,d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2dt^2, \tag{1.45}$$

а то је једнако Шварцшилдовој метрици (1.29). Препознајемо Шварцшилдов радијус (1.28) и скраћеницу (1.32), па и овде можемо можемо писати

$$\kappa^2 = \frac{r_s}{r} = \frac{2GM}{rc^2}. \tag{1.46}$$

То поједностављује и метрику (1.44).

Пример 1.3.1. *Поред $d\theta = d\theta_0$ и $d\varphi = d\varphi_0$, показати да су*

$$\begin{cases} dr = \chi\,dr_0 + i\sqrt{e^{-\kappa^2} - \chi^2}\,cdt_0 \\ cdt = ie^{\kappa^2}\sqrt{e^{-\kappa^2} - \chi^2}\,dr_0 + e^{\kappa^2}\chi\,cdt_0, \end{cases} \tag{1.47}$$

где су $i = \sqrt{-1}$ и $\chi \in \mathbb{C}$ произвољан параметар, опште трансформације координата које (1.44) преводе у равну метрику.

Решење. Игноришемо координате које не утичу на резултат и полазимо од система:

$$\begin{cases} dr = \alpha_{rr}\,dr_0 + \alpha_{rt}\,cdt_0 \\ cdt = \alpha_{tr}\,dr_0 + \alpha_{tt}\,cdt_0, \end{cases}$$

где α_{mn} зависе само од r. Сменом у израз (1.44) добијамо:

$$\begin{aligned} e^{2GM/rc^2}\,dr^2 - e^{-2GM/rc^2}\,c^2dt^2 = \\ = e^{2GM/rc^2}(\alpha_{rr}\,dr_0 + \alpha_{rt}\,cdt_0)^2 - e^{-2GM/rc^2}(\alpha_{tr}\,dr_0 + \alpha_{tt}\,cdt_0)^2 \\ = (\alpha_{rr}^2 e^{2GM/rc^2} - \alpha_{tr}^2 e^{-2GM/rc^2})\,dr_0^2 + \\ +2(\alpha_{rr}\alpha_{rt}e^{2GM/rc^2} - \alpha_{tr}\alpha_{tt}e^{-2GM/rc^2})\,dr_0\,cdt_0 + \\ +(\alpha_{rt}^2 e^{2GM/rc^2} - \alpha_{tt}^2 e^{-2GM/rc^2})\,c^2dt_0^2. \end{aligned}$$

Изједначавајући овај интервал са $dr_0^2 - c^2dt_0^2$ добијамо систем једначина:

$$\begin{cases} \alpha_{rr}^2 e^{2GM/rc^2} - \alpha_{tr}^2 e^{-2GM/rc^2} = 1, \\ \alpha_{rr}\alpha_{rt}e^{2GM/rc^2} - \alpha_{tr}\alpha_{tt}e^{-2GM/rc^2} = 0, \\ \alpha_{rt}^2 e^{2GM/rc^2} - \alpha_{tt}^2 e^{-2GM/rc^2} = -1. \end{cases}$$

То су четири једначине са три непознате што значи да имамо произвољан параметар, рецимо $\alpha_{rr} = \chi \in \mathbb{C}$. Затим лако налазимо остале коефицијенте. □

Лако је проверити да се систем (1.47) апроксимацијом (1.39) своди на систем једначина из теореме 1.2.3. У оба та система је видљива нека необична симетрија коју ћемо сада испитати, заједно са чудним наизглед сувишним параметром χ.

1.4 Ротације

Систем једначина (1.47) напишимо у облику

$$\begin{cases} e^{\kappa^2/2}\,dr = e^{\kappa^2/2}\chi\,dr_0 + ie^{\kappa^2/2}\sqrt{e^{-\kappa^2}-\chi^2}\,cdt_0 \\ e^{-\kappa^2/2}\,cdt = ie^{\kappa^2/2}\sqrt{e^{-\kappa^2}-\chi^2}\,dr_0 + e^{\kappa^2/2}\chi\,cdt_0, \end{cases} \tag{1.48}$$

који добијамо множећи прву са $\exp(\kappa^2/2)$, а другу са $\exp(-\kappa^2/2)$. Приметимо да десне стране можемо поједноставити сменом:

$$\cos i\psi = e^{\kappa^2/2}\chi, \quad \sin i\psi = e^{\kappa^2/2}\sqrt{e^{-\kappa^2}-\chi^2}, \tag{1.49}$$

јер је збир квадрата косинуса и синуса један, без обзира што су ови дефинисани са два независна параметра κ и χ. Даље уводимо хиперболичне функције, косинус и синус:

$$\operatorname{ch}\psi = \cos i\psi = \frac{e^{\psi}+e^{-\psi}}{2}, \quad \operatorname{sh}\psi = -i\sin i\psi = \frac{e^{\psi}-e^{-\psi}}{2}, \tag{1.50}$$

па добијамо

$$\begin{cases} dr_1 = \operatorname{ch}\psi\,dr_0 - \operatorname{sh}\psi\,cdt_0 \\ cdt_1 = -\operatorname{sh}\psi\,dr_0 + \operatorname{ch}\psi\,cdt_0, \end{cases} \tag{1.51}$$

где је стављено $dr_1 = e^{\kappa^2/2}\,dr$ и $cdt_1 = e^{-\kappa^2/2}\,cdt$. Ово су ротације у псеудо-метричком простору.

Хиперболна тригонометрија је веома слична обичној, као што се види из следећих неколико, од иначе многобројних идентитета:

$$\left.\begin{array}{ll} \operatorname{ch}^2\psi - \operatorname{sh}^2\psi = 1, & \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1, \\ \operatorname{th}\psi = \frac{\operatorname{sh}\psi}{\operatorname{ch}\psi}, & \operatorname{tg}\phi = \frac{\sin\phi}{\cos\phi}, \\ \operatorname{ch}(2\psi) = \operatorname{ch}^2\psi + \operatorname{sh}^2\psi, & \cos(2\phi) = \cos^2\phi - \sin^2\phi, \\ \operatorname{sh}(2\psi) = 2\operatorname{ch}\psi\operatorname{sh}\psi, & \sin(2\phi) = 2\sin\phi\cos\phi, \\ \operatorname{th}(2\psi) = \frac{2\operatorname{th}\psi}{1+\operatorname{th}^2\psi}, & \operatorname{tg}(2\phi) = \frac{2\operatorname{tg}\phi}{1-\operatorname{tg}^2\psi}. \end{array}\right\} \tag{1.52}$$

Тангенс хиперболни ($\operatorname{th}\psi$) и котангенс хиперболни ($\operatorname{cth}\psi$) такође су реципрочне функције, $\operatorname{th}\psi\operatorname{cth}\psi = 1$, као што су то тангенс и котангенс обични.

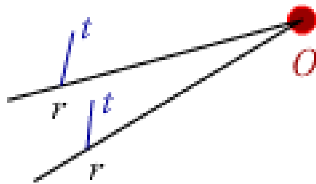
Пример 1.4.1. *Показати да се сменом $th\,\psi = \frac{v}{c}$ систем (1.51) своди на Лоренцове трансформације.*

Решење. Из (1.52) лако налазимо:

$$\operatorname{ch}\psi = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\psi}}, \quad \operatorname{sh}\psi = \frac{\operatorname{th}\psi}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\psi}}, \tag{1.53}$$

а отуда трансформације (1.13). □

За разлику од Лоренцових, које трансформишу инерцијалне системе у једноликом праволинијском кретању (дуж r-ose), код ових трансформација на крају урачунавамо и контракцију дужине и дилатацију времена множећи инфинитезималне промене (dx и cdt) фактором $\exp(\pm\kappa^2/2)$. Зашто долази до ових деформација дужине и трајања и шта су последице?



Slika 1.4: Гравитација

Централно симетрично гравитационо поље попут Сунчевог на слици 1.4, на простор-време материјалне тачке која мирује на удаљености r од центра поља делује на два начина. Оно скраћује дужине у правцу центра гравитације и успорава време, релативно у односу на посматрача у мировању изван поља (за кога $r \to \infty$). Тај удаљени посматрач не осећа дејство гравитационог поља, а према принципу еквиваленције он дату тачку у пољу мора третирати као да се она на датом месту у датом (веома малом) тренутку креће неком константном брзином $v = c\,\mathrm{th}\,\psi$.

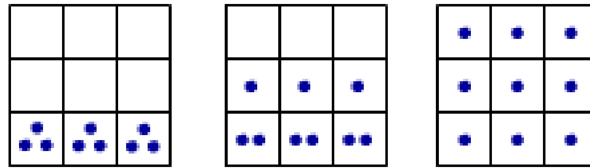
Посматрајући ширу околину датог догађаја, дуже просторне интервале и трајања, брзина v није константна. Друго је питање, зашто се се ова брзина мења зависно од два параметра κ и χ? На истој слици 1.4 је симболично представљен нагиб временских оса две тачке које мирују на истим удаљеностима али на различитим правцима у датом гравитационом пољу. Таквих једнаких удаљености има по читавој сфери полупречника r са центром у O. За све тачке на тој сфери биће први параметар константан ($\kappa = \text{const.}$), а тек други ће дефинисати међусобно различите нагибе њихових временских оса. Други параметар је функција $\chi = \chi(x, y, z)$ која генерише позиције временских оса у три димензије. То више нису димензије простора, већ су димензије времена једнако физички реалног, или да кажем математички „имагинарног“ као и ово време који ми „видимо“.

Дакле, једна од последица дилатације времена због гравитације су различити правци тока времена. За разлику од простог успоравања времена какво имамо у специјалној релативности, када су правац кретања и време оба система у истој равни па се сви догађаји развијају (различитим брзинама) јединим могућим поретком, у гравитационом пољу временски догађаји немају исти детерминистички ток. Зато гравитацију можемо покушати разумети и са становишта вероватноће, а затим и неке појаве које на први поглед немају везе са вероватоћом.

Према другом закону термодинамике, топлота спонтано прелази са тела више на тело ниже температуре. Кажемо да је то процес увећања *ентропије* која је мера „нереда“. Боље речено, ентропија је мера „равномерности у распоређивању“ молекула гаса, односно датог термодинамичког система. Још тачније, спонтани раст ентропије долази од закона вероватноће, да се најчешће реализују највероватнији догађаји.

На слици 1.5 приказано је распоређивање девет куглица у девет кутија, на три начина. У првом случају, слика лево, све куглице су по три у доње три кутије. У другом случају, кутије у средини, у првом реду одозго нема куглица, у средњем је

по једна, а у доњем су по две. У трећем распореду, десно, у свакој кутији налази се по једна куглица.



Slika 1.5: Распоређивање куглица у кутије.

Ако су вероватноће распореда било које од куглица у било којој од кутија једнаке, најмање вероватан распоред је први, а највероватнији је трећи. Замислимо сада да куглица има много више и да оне представљају молекуле ваздуха које се распоређује по соби. Када је соба у бестежинском стању, у инерцијалном систему, онда знамо да ће се молекуле распоређивати једнолико, као на десној слици. Међутим, ако се оне гомилају ка дну, као на средњој слици, ми и даље нећемо сумњати у законе вероватноће, већ ћемо исходе покушати разумети деловањем неке силе која молекуле вуче на доле. Сада ћемо само додати да та сила узрокује промену вероватноћа.

Једном када се примети да гравитација нарушава вероватноће, остаје само ствар објашњења. Тешко је сумњати у тезу да природа најчешће реализује највероватније случајне догађаје, па чак и када „видимо“ да су сметња тој „нормалној“ реализацији некакве силе. Са друге стране, свестан сам колико „управљање вероватноћом“ од стране физичких сила данас звучи чудно, да не кажем уврнуто. Зато, ако имате тешкоћа са нагађањем, анализом алтернатива и уопште фантазирањем у физици, прескочите следећи део текста.

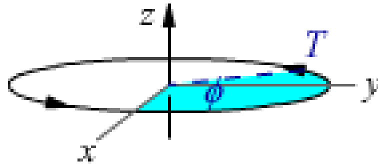
Осново питање овде је, шта се догађа реализацијом случајног догађаја? Прост одговор је, неизвесност пре исхода постаје информација после. Количина исчезле неизвесности дала је тачно исту количину информације. Тако настаје време, јер догађаји стално теку ка највероватнијим. Управо је спонтани раст ентропије процес у којем нема дејства сила те излази на видело чињеница да природа реализује највероватније, чиме се лишава неизвесности те ствара информацију, а тако настала информација је оно што називамо „садашњост“.

Доследно даље, приметимо да једнолико распоређивање гаса у соби на начин распореда куглица у кутије десно на слици 1.5, ствара највише информације. Са становишта посматрача K_0 изван гравитационог поља у претходном тексту ($r \to \infty$), посматрач K_1 који мирује у соби у гравитационом пољу на удаљености r од центра поља, чије се молекуле гаса распоређују према средњој слици, има нарушене исходе. Посматрач K_0 ће рећи да код K_1 догађаји не иду ка највероватнијим и зато, да околина K_0 ствара више информације од околине K_1, односно да време посматрача K_0 иде спорије. Слично, K_1 ће закључити да време посматрача K_0 иде брже.

У случају да су два посматрача K и K' у одвојеним собама у инерцијалним системима у једноликом праволинијском кретању један у односу на други, посматач K види молекуле гаса K' са већом (кинетичком) енергијом, што према другом

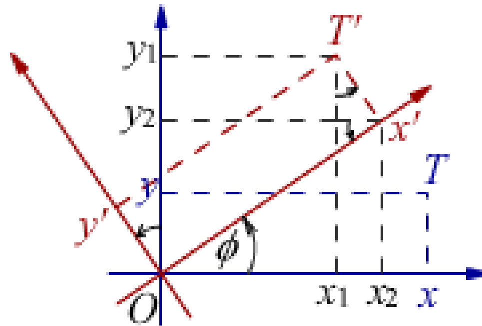
закону термодинамике значи да би топлота са K' требала прелазити на K. То опет са становишта вероватноће значи да су стања K вероватнија и да она производе више информације. Да време у систему K' тече спорије, сагласно резултатима специјалне теорије релативности.

Вратимо се сада на формуле (1.51). Приметимо да се оне могу применити на било каква убрзана кретања и да се тада може користити тумачење информације на начин како је то учињено у пар претходних параграфа. Први пример је ротација у равни Oxy око z-осе константном угаоном брзином ω.



Slika 1.6: Ротација око вертикалне осе.

Нека је дат Декартов правоугли систем координата, као на слици 1.6. Материјална тачка T по кружници полупречника r. У почетном тренутку ($t = 0$) она је на месту $T_0(r, 0, 0)$, а у тренутку t на месту $T_t(x', y', 0)$ тако да је угао $\phi(t) = \angle T_0OT_t$. Угаона брзина $\omega = \Delta\phi/\Delta t$ је промена угла ϕ у јединици времена t.



Slika 1.7: Ротација у равни Oxy.

Ротацију тачке $T(x, y) \to T'$ за угао $\phi = \angle TOT'$ можемо разумети и као ротацију њеног система Oxy у систем $Ox'y'$, као на слици 1.7. Тада је $\phi = \angle xOx' = \angle yOy'$, а за координате важе једнакости $\overline{Ox} = \overline{Ox'}$ и $\overline{Oy} = \overline{Oy'}$, при чему је $r^2 = x^2 + y^2$. Са слике видимо да је:

i. $x_2 = x\cos\phi$, $x_2 - x_1 = y\sin\phi$;

ii. $y_2 = x\sin\phi$, $y_1 - y_2 = y\cos\phi$;

iii. $x_1 = x\cos\phi - y\sin\phi$, $y_1 = x\sin\phi + y\cos\phi$.

Према томе, тачка $T(x, y)$ након ротације Декартовог система око исходишта O за

угао ϕ долази на положај $T'(x_1, y_1)$ са координатама:

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\phi - y\sin\phi, \\ y_1 = x\sin\phi + y\cos\phi. \end{cases} \tag{1.54}$$

У оба случаја T и T' су положаји писани у истом систему Oxy. Стављајући у овај систем $\phi = i\psi$, а затим користећи (1.50), добијамо:

$$x_1 = x\cos(i\psi) - y\sin(i\psi), \quad y_1 = x\sin(i\psi) + y\cos(i\psi),$$

$$x_1 = x\operatorname{ch}\psi - iy\operatorname{sh}\psi, \quad y_1 = ix\operatorname{sh}\psi + y\operatorname{ch}\psi.$$

Множимо другу једначину имагинарном јединицом и користимо смену $iy = \tau$:

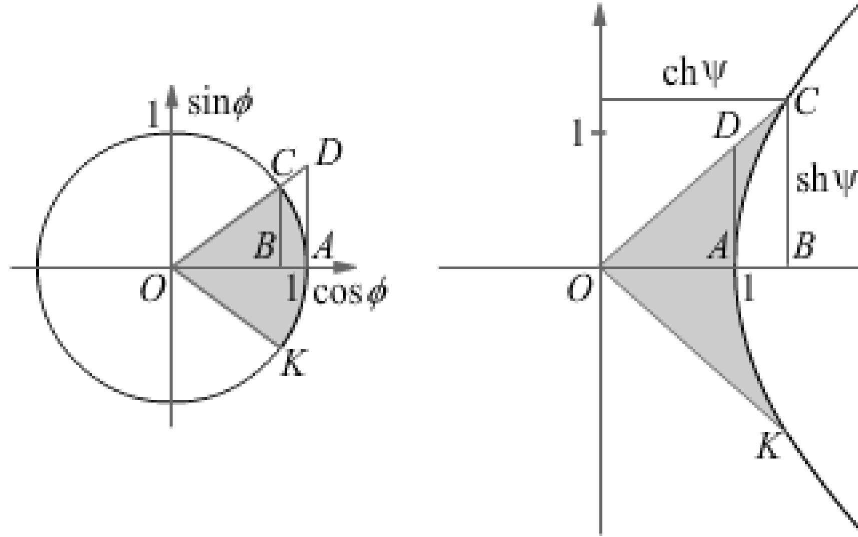
$$x_1 = x\operatorname{ch}\psi - \tau\operatorname{sh}\psi, \quad \tau_1 = -x\operatorname{sh}\psi + \tau\operatorname{ch}\psi. \tag{1.55}$$

Приметимо да сменом $x \to dr$ и $\tau \to cdt$ ове трансформације постају формално једнаке (1.51). Неслагање са имагинарношћу временске осе се може усклађивати са изразом (1.48), због

$$i\sqrt{\exp(-\kappa^2) - \chi^2} = \sqrt{\chi^2 - \exp(-\kappa^2)},$$

јер је $i = \sqrt{-1}$.

Ова аналогија између обичне ротације и теорије релативности има корене у самим основама обичне и хиперболне тригонометрије (слика 1.8).



Slika 1.8: Тригонометријска кружница и хипербола.

На слици 1.8 лево је тригонометријска кружница. То је јединична кружница аналитичке једначине $x^2 + y^2 = 1$. Шрафирани кружни исечак има површину

$$\phi = \frac{1}{2}r^2 \cdot \angle KOC = \phi = \frac{1}{2}1^2 \cdot 2\angle AOC = \angle AOC. \tag{1.56}$$

Косинус и синус (угла $\phi = \angle AOC$) су дужине $\overline{OB}$ и $\overline{BC}$. То су катете правоуглог троугла OBC сличног троуглу OAD, па је

$$\overline{AD} : \overline{AO} = \overline{BC} : \overline{BO} = \overline{AD} : 1 = \sin\phi : \cos\phi, \tag{1.57}$$

одакле $\operatorname{tg}\phi = \overline{AD} = \sin\phi / \cos\phi$.

Сменом $y \to iy$ добијамо $\phi \to i\psi$ и јединичну хиперболу $x^2 - y^2 = 1$, на слици десно. Шрафирани део је површине ψ, која је двострука разлика површина правоуглог троугла OBC и теменог одсечка ABC хиперболе, где је $\overline{OB} = x$ и $\overline{BC} = y$. Ту површину израчунавамо интеграљењем:

$$\psi = 2(P_{\Delta OBC} - P_{ABC}) = 2(\frac{1}{2} \cdot \overline{OB} \cdot \overline{BC} - \int_1^x \sqrt{x^2 - 1}\, dx) =$$

$$= 2\left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1} - \ln(x + \sqrt{x^2-1})\right)\right],$$

$$\psi = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}). \tag{1.58}$$

Отуда израчунавамо инверзно $x = \frac{1}{2}(e^{\psi} + e^{-\psi})$, па добијамо једначине (1.50).

Друго је питање, зашто су ротације тако универзалне трансформације? Зато што се ротацијама могу представити остале симетрије у математици.

Централна симетрија је пресликавање $f_c : A \to A'$ у односу на дату фиксну тачку C произвољне тачке A у тачку A' на супротну страну, тако да је $A - O - A'$ (тачка O је између на дужи AA') и $\overline{AO} = \overline{OA'}$ (удаљености A и A' од O су једнаке). То је пресликавање које се може добити ротацијама (у равнинама) за $\phi = 180°$. Помоћу две централне симетрије се може добити *транслација*, паралелно померање за дати вектор.

Осна симетрија или рефлексија у односу на праву, може се добити ротацијом у трећој димензији око те праве. Слично се ротацијама у даљњим димензијама може постићи рефлексија у односу на раван.

Зато није чудно што ротације лако налазе примене у физици, чак и у псеудо-еуклидском, па и не-еуклидском простору.

Пример 1.4.2. *Применити трансформације (1.51) на координатни систем који ротира око апликате (z-осе) константном угаоном брзином ω.*

Решење. Материјална тачка ротира по кружници полупречника r тангенцијалном брзином $v = r\omega$. Она прелази инфинитезималне путеве $dl = rd\phi$ дуж кружнице, за време cdt. Ако су са становишта посматрача који мирује у инерцијалном систему неке дужине и периоди у мировању dl_0 и dt_0, онда ће исте у кретању тај посматрач видети као:

$$dl = dl_0\sqrt{1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}}, \quad dt = \frac{dt_0}{\sqrt{1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}}}, \tag{1.59}$$

што је у складу са (1.17) и (1.18). У трансформацијама (1.51) тангенс хиперболни постаје $\operatorname{th}\psi = r\omega/c$, а метрика попут (1.44):

$$ds^2 = dr^2 + \left(1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}\right)^{-1} r^2 d\phi^2 + dz^2 - \left(1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}\right) c^2 dt^2, \tag{1.60}$$

у цилиндарском[25] систему координата, где је c брзина светлости у вакууму. □

У систему који ротира, као и у централно симетричном Шварцшилдовом гравитационом пољу, такође није могућа синхронизација сатова. То значи да и простор-време система који ротира лежи у бар пет димензија. Међутим, ова метрика се не може добити из Ајнштајнових једначина поља, јер је „гравитација“ тог поља одбојна. На тело које ротира делују одбојне центрифугалне силе, али објашњење успоравања времена помоћу снижене информације, помоћу ентропије и слике 1.5 и даље важи. Исто важи и за следећи пример.

Према последњим мерењима[26] ширења Свемира, брзина удаљавања галаксија од нас порасте за око 70 километара у секунди на сваки мегапарсек (око 3 милиона светлосних година) удаљености. Означимо ли ту брзину са $v = v(r)$ на удаљености r Земље, аналогно (1.44) у сферним координатама можемо написати метрику:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) c^2 dt^2, \tag{1.61}$$

где је $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2$. Када брзина v расте са удаљеношћу, из ове метрике следи одбојна „гравитација“. У складу са поменутим мерењима за брзину ширења бисмо могли ставити $v : c = r : r_u$, где је r_u полупречник видљивог Универзума (рецимо мало већи од 13 милијарди светлосних година). То је симетрично Шварцшилдовом централно симетричном гравитационом пољу.

Када гледамо даље у Свемир, гледамо дубље у његову прошлост, па је (161) метрика видљивог свемира. Друго, како са Земље у било ком правцу ми гледамо ка прошлости, ми увек гледамо ка једном центру из којег је Свемир настастао. Ако се сада шири и коначан је, имао је почетаку у једној тачки у догађају који се назива „велика експлозија“ (енг. *Big Bang*). Све дубље гледано Свемир је мањи, гушћи, са јачом контракцијом дужина и са већом дилатацијом времена у правцу центра почетне експлозије. Оно што ми видимо је метрика (1.61).

Свемир се хладио и још увек се хлади према претходно поменутом порасту ентропије, прелазећи са мање на више вероватна стања, конвертујући неизвесност у информацију. Ту информацију називамо „садашњост“. Зато што је у затвореним системима количина информације константна, она неизвесност која постаје нова информација потискује стару у прошлост.

[25] Cylindrical Coordinates: `http://mathworld.wolfram.com/CylindricalCoordinates.html`
[26] Spitzer Space Telescope, NASA

1.5 Поремећај

Овде разрађујемо идеју поменуту у књизи [3], да се неизвесност потрошена реализацијом случајног догађаја преобразила у исту количину информације. Слично претварању енергије из једног облика у други. Таквим смањењем неизвесности, због делимичне или потпуне реализације датог случајног експеримента, повећавају се вероватноће преосталих исхода. Важи и обратно, веће вероватноће дају мање неизвесности, од којих реализацијом добијамо мање информације.

Зато што се око нас дешавају сталне природне реализације случајних догађаја, зато имамо стално настајање садашњости. Закон одржања информације узрок је сталног настајања прошлости, а процес настајања садашњости из будућности и њено нестајање у прошлости доживљавамо као ток времена. Оба закона одржања заједно, неизвесности и информације, омогућују нам да можемо говорити о универзуму будућих, садашњих и прошлих догађаја.

Реализације случајности су свугде око нас у токовима (преображаја) енергије. Видимо их у другом закону термодинамике: топлота спонтано прелази са тела више на тело ниже температуре. Ток (топлотне) енергије разумемо као спонтано увећање ентропије, коју схватамо као меру количине нереда датог физичког система. Познато је да је неред термодинамичког система највећи у једноликом распореду молекула, али и да је то највероватнији распоред. Према томе, раст ентропије односно други закон термодинамике, последице су принципа вероватноће: да се најчешће реализују навероватнија стања.

Исти принцип сугерише да ентропију и сличне разлоге њене промене треба видети и код осталих физичких стања. Ако већ имамо стохастичко понашање физичке реалности, онда је логично установити да сваки физички систем спонтано прелази из мање у више вероватна стања. Неспорно, за разлику од последице, да је ток садашњости заправо процес трошења неизвесности и стварања информације. Поменути принцип вероватноће сам по себи не би био довољан разлог за расправе које следе да није његове чудне последице, да ће од два координатна система, онај који ствара мање садашњости имати релативно спорији ток времена.

Када се не нарушава неки од закона одржања, сваки физички систем спонтано прелази из мање у више вероватно стање. То ћемо сматрати процесом повећања ентропије[27], који нас води ка поопштавању другог закона термодинамике на остале облике енергије.

Када се два инерцијална система K и K' крећу узајамном брзином $v = \text{const.}$ правцем апсциса, тада тело које мирује у K' и које у односу на тај систем има енергију $E_0 = m_0c^2$, у односу на систем K имаће енергију $E = mc^2$ за коју важи

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{1.62}$$

при чему је m_0 маса тела у мировању, а m маса истог тела у кретању датом брзином. То су познати релативистички резултати (в. [5]) и нема потребе да их овде изводимо.

[27] Понекад је израз „неред“ за ентропију помало нејасан, непрецизан.

Енергија тела у кретању E већа је од његове енергије у мировању E_0 за *кинетичку енергију*:

$$E_k = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2 \approx \frac{m_0v^2}{2}, \tag{1.63}$$

јер је

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2}, \tag{1.64}$$

за мале брзине v у односу на брзину светлости c.

Када би тело са кинетичком енергијом (1.63) ударило у зид и зауставило се, сва кинетичка енергија би прешла углавном у топлотну. Компактно кретања целине, због закона одржања (енергије и импулса), прелази у (хаотично) мноштво кретања појединих молекуле тела која преузимају претходни резултатни импулс свих. Са становишта релативног посматрача K, систем K' је прешао из уређеног у хаотично кретање, из стања мање у стање веће ентропије.

Ако је ентропија физичка реалност, онда морамо прихватити да су одговарајући подсистеми K' у стањима мање ентропије релативно у односу на K. Они реализују мање неизвесности и генеришу мање информације. Другим речима, исходи одговарајућих догађаја у системима K и K' немају једнаке вероватноће. Са становишта K они у K' се реализују у мање вероватне[28].

Гледано из K може бити чудно што се у K' не реализују највероватнији исходи, али у томе нема контрадикције, напротив. То је у складу са принципом вероватноће[29], јер кретање утиче на вероватноће догађаја. Слично се догађа у гравитационом пољу, односно уопште тамо где се појављује различита брзина тока времена. Али пре него што пређемо на анализу Ајнштајнових једначина поља са освртом на ове нове ставове, приметимо да је значај геометрије у гравитацији сада још већи.

Тамо где време тече спорије ентропија је мања а у такво стање систем не иде спонтано. У специјаној теорији релативности, тело из стања мировања не може прећи у стање (једноликог праволинијског) кретања јер би тада имало мању ентропију и за такав прелазак је потребно дејство силе. У општој теорији релативности, тело у слободном паду има већу ентропију од тела које мирује у гравитационом пољу и оно зато тежи слободном паду. Ми кажемо, гравитација привлачи тело, а можемо рећи и „тело тежи инерцијалном стању у којој има већу ентропију“, аналогно другом закону термодинамике.

У овом тумачењу механике, инерција се своди на ентропију. Ентропија узрокује и успоравање времена у гравитационом пољу, а гравитација је последица (поопштеног облика) другог закона термодинамике. Из истих разлога се Свемир шири.

Успоравање тока времена је у директној вези са претварањем неизвесности у информацију и генерисање садашњости. Када се из неког разлога не реализују максималне вероватноће са становишта неког посматрача ван гравитационог поља,

[28]Важи и обрнуто, јер су њихова становишта релативна

[29]Највероватнији догађаји се најпре реализују.

он то разуме као слабију производњу садашњости и спорији ток времена. Временске координате су у том смислу најважније, а тако је и у Ајнштајновој теорији поља.

Друго, поред просторне три димензије (x_1, x_2, x_3) ми сада имамо три димензије времена (рецимо x_4, x_5, x_6) у релативистичком простор-времену. Док Земља кружи око Сунца, слично кружи и њен ток времена. Оса времена шета по изводницама омотача неке кружне (елиптичне) купе. Гледајући унутар три временске димензије, то кружење потсећа на кретање честице-таласа. Различити делови планете као да су интерферирали у том таласу, а иста аналогија се надовезује на случај судара небеских тела због превише блиских путања. То је дуализам између три реалне димензије простора и три имагинарне димензије времена, а затим и између великог и малог.

Са друге стане, сви су временски правци (димензије x_4, x_5 и x_6) равноправни у односу на просторне димензије (x_1, x_2 и x_3). Они се у гравитационом пољу могу свести на једну осу координата, означимо је са $x_0 = ict$, која је комбинација (векторски збир) поменуте три.

Видљиве су сличности и разлике ових са идејама Калуза-Клајнове теорије и квантно-механичке теорије стрингова. Али, ми се се тиме нећемо бавити. Држаћемо се само потврда сагласности принципа вероватноће и познатих резултата опште теорије релативности.

1.6 Тензорски рачун

Враћамо се на Ајнштајнове једначине поља (1.24):

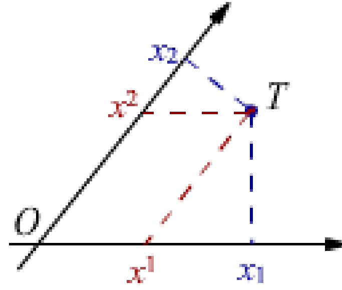
$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} + \Lambda\, g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \tag{1.65}$$

да би сада разумели њихову математику и разлоге да оне буду баш такве какве су, те да би видели да су оне и у свом извођењу сагласне са нашим претходним ставовима. Као што смо рекли то су тензорске једначине, јер је принцип опште релативности - коваријантност - појам типичан за тензоре. Следићемо један лакши приступ овом иначе веома тешкој области математике, објашњавајући редом:

1. трансформације координата;
2. метрички тензор $g_{\mu\nu}$;
3. Кристофелове симболе $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$;
4. Ричијев тензор кривине $R_{\mu\nu}$ и скалар кривине R;
5. тензор енергије импулса $T_{\mu\nu}$.

Појмови 2, 3. и 4. налазе се на левој страни Ајнштајнове једначине и они дефинишу геометрију гравитације, а десно је тензор енергије који (делом) са космолошком константом Λ представља физику гравитације.

1. Декартове трансформације су најједноставније. У косоуглом Декартовом систему Ox_1x_2, положај дате тачке T можемо описати на два начина. Помоћу њених окомитих пројекција на осе $T(x_1, x_2)$, или помоћу паралелних $T(x^1, x^2)$, као

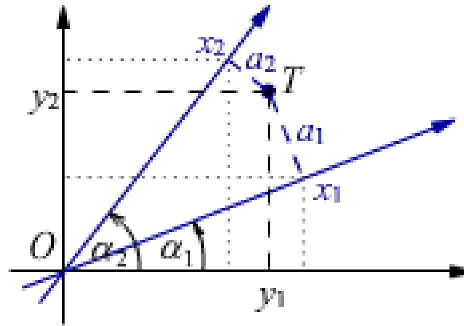


Slika 1.9: Коваријантне $T(x_1, x_2)$ и контраваријантне $T(x^1, x^2)$ координате.

што се види на слици 1.9. Прве називамо *коваријантним* коориднатама, а друге *контраваријантним* координатама.

Косоугли систем Ox_1x_2 на слици 1.9 означимо са X. Нека се у истој равни са истим исходиштем налази и правоугли Декартов систем Oy_1y_2, систем Y. Коваријантне координате тачке $T(y_1, y_2)$ поклапају се са њеним контраваријантним. Нека је угао између апсциса датих система $\alpha_1 = \angle y_1Ox_1$, а нека је $\alpha_2 = \angle y_1Ox_2$.

Пример 1.6.1. *Изразити Y помоћу коваријантних координата X.*



Slika 1.10: Коваријантне координате $T(x_1, x_2)$ и $T(y_1, y_2)$.

Решење. На слици 1.10 су приказане коваријантне координате тачке T у поменутим системима X и Y. Удаљеност дате тачке од исходишта је $\overline{OT} = r$, па Питагорина теорема даје $a_1 = \sqrt{r^2 - x_1^2}$ и $a_2 = \sqrt{r^2 - x_2^2}$. Затим лако налазимо:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \cos\alpha_1 - a_1 \sin\alpha_1, \\ y_2 = x_2 \sin\alpha_2 - a_2 \cos\alpha_2. \end{cases} \tag{1.66}$$

Када је угао између X оса прав, тада је $a_1 = x_2$, $a_2 = x_1$, а $\alpha_2 = 90^\circ + \alpha_1$, па се ове трансформације своде на ротацију (1.54) за угао $\phi = \alpha_1$. □

Пример 1.6.2. *Изразити Y помоћу контраваријантних координата X.*

Решење. Нацртајте слику два система, X у Y. Лако налазимо:

$$\begin{cases} y^1 = x^1 \cos\alpha_1 + x^2 \cos\alpha_2, \\ y^2 = x^1 \sin\alpha_1 + x^2 \sin\alpha_2. \end{cases} \tag{1.67}$$

Када је угао између X оса прав, тада је $\alpha_2 = 90^\circ + \alpha_1$, ове трансформације се своде на ротацију (1.54) за угао $\phi = \alpha_1$. □

У наставку углавном користимо криволинијске координате због чега морамо прећи на рад са њиховим инфинитезималним (веома малим) деловима. Ове мале интервале координата ћемо означавати dx_μ са доњим индексима $\mu = 0, 1, 2, 3$ и називати *коваријантним* координатама, односно са dx^μ са горњим истим индексима када ћемо их називати *контраваријантним* координатама. Нулта је временска координата $x_0 = ict$, где је $i = \sqrt{-1}$ имагинарна јединица, а остале три су просторне.

Када знамо трансформацију координата из система X у Y и инверзну:

$$y^\mu = y^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad x^\mu = x^\mu(y^0, y^1, y^2, y^3), \tag{1.68}$$

коваријантни и контраваријантни вектори се дефинишу особинама трансформације њихових компоненти ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$), редом:

$$v_\mu(y) = v_\nu(x)\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu}, \quad v^\mu(y) = v^\nu(x)\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}, \tag{1.69}$$

при чему се подразумева сабирање по поновљеном једном горњем и једном доњем индексу[30], овде индексу ν.

Пример 1.6.3. *Показати да је тангентни вектор на криву контраваријантан.*

Решење. Нека је крива дата параметарски $x^\mu = x^\mu(t)$. Тангентни вектор на ту криву има компоненте

$$T^\mu(y) = \frac{dy^\mu}{dt} = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{dt} = T^\nu(x)\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu},$$

што значи да се трансформише контраваријантно. □

Пример 1.6.4. *Показати да се градијент трансформише коваријантно.*

Решење. Нека је $\Phi(x)$ неко скаларно поље и нека је оно градијент неког векторског поља:

$$\mathbf{G}(x) = \nabla\Phi(x) = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x^0}, \frac{\partial\Phi}{\partial x^1}, \frac{\partial\Phi}{\partial x^2}, \frac{\partial\Phi}{\partial x^3}\right), \tag{1.70}$$

са компонентама $G_\mu(x) = \frac{\partial\Phi(x)}{\partial x^\mu}$. У другом координатном систему, градијент је:

$$G_\mu(y) = \frac{\partial\Phi(y)}{\partial y^\mu} = \frac{\partial\Phi(y(x))}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu} = G_\nu(x)\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu}, \tag{1.71}$$

што значи да је градијент коваријантан вектор. □

[30] Ајнштајнова конвенција о сабирању.

2. Метрички тензор дефинише Питагорину теорему у датом систему координата. Нека је Y правоугли Декартов систем координата, а X произвољан криволинијски и нека су нам познате једначине (1.68). Тада у систему Y важи Питагорина теорема, у облику:

$$(ds)^2 = (dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2. \tag{1.72}$$

Преласком на криволинијски систем, због

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} dy^\nu, \tag{1.73}$$

добијамо:

$$(ds)^2 = \sum_{\mu=0}^{3} (dx^\mu)^2 = \sum_{\mu=0}^{3} \left[\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} dy^\alpha \right) \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\beta} dy^\beta \right) \right] = \sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\beta} dy^\alpha dy^\beta,$$

$$(ds)^2 = \sum_{\mu=0}^{3} g_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta, \tag{1.74}$$

где се по конвенцији такође сабира по поновљеним (овде α и β) једном горњим једном доњим индексима. Коефицијенти

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\beta}, \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3, \tag{1.75}$$

чине метрички тензор. То је тензор другог реда, два пута коваријантан.

Пример 1.6.5. *Показати да су компоненте метричког тензора коваријантни тензори другог реда.*

Решење. У два произвољна система (x и y) имамо:

$$(ds)^2 = g_{\alpha\beta}(x)\, dx^\alpha dx^\beta, \quad (ds)^2 = g_{\alpha\beta}(y)\, dy^\alpha dy^\beta,$$

$$g_{\alpha\beta}(x)\, dx^\alpha dx^\beta = g_{\alpha\beta}(y)\, dy^\alpha dy^\beta. \tag{1.76}$$

Затим, због:

$$dy^\alpha = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\, dx^\mu, \quad dy^\beta = \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu}\, dx^\nu,$$

и из (1.76), добијамо:

$$g_{\alpha\beta}(x)\, dx^\alpha dx^\beta = g_{\alpha\beta}(y)\, \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu}\, dx^\mu dx^\nu,$$

$$\left(g_{\alpha\beta}(x) \delta_{\mu\nu} - g_{\alpha\beta}(y)\, \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} \right) dx^\mu dx^\nu = 0,$$

Због произвољности dx^μ, мора израз у загради бити нула, а отуда

$$g_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\beta}(y)\, \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu}, \tag{1.77}$$

што је и требало показати. □

Пример 1.6.6. *Наћи метрички тензор за цилиндарске координате $Or\varphi z$.*

Решење. Трансформације из правоуглог Декартовог $Oxyz$ у цилиндарски систем координата су:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases} \tag{1.78}$$

Диференцијал за $f = f(r,\varphi,z)$ је $df = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \varphi}d\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}dz$, па овде имамо:

$$\begin{cases} dx = \cos\varphi\,dr - r\sin\varphi\,d\varphi, \\ dy = \sin\varphi\,dr - r\cos\varphi\,d\varphi, \\ dz = dz. \end{cases} \tag{1.79}$$

Сабирањем квадрата (1.72) и сређивањем добијамо

$$(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (dr)^2 + (rd\varphi)^2 + (dz)^2. \tag{1.80}$$

Према томе, компоненте метричког тензора за цилиндарске координате су:

$$g_{rr} = 1, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2, \quad g_{zz} = 1, \tag{1.81}$$

а све остале су нуле. □

Пример 1.6.7. *Наћи метрички тензор сферних координата $Or\varphi\theta$.*

Решење. Трансформације из правоуглог у сферни систем су:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases} \tag{1.82}$$

Узимајући диференцијале, затим квадрирањем, сабирањем и сређивањем добијамо:

$$g_{rr} = 1, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2\sin\theta, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \tag{1.83}$$

а све остале компоненте су нуле. □

3. Кристофелови[31] симболи $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$. Када је тензор нула у једном координатном систему он је нула у свим координатним системима. Ако су два тензора другог реда једнака у једном систему координата, $A_{mn}(x) = B_{mn}(x)$, онда су они једнаки у сваком систему координата. Међутим, њихове деривације се могу трансформисати другачије.

Нека су у једном систему (x) дати вектор и његови изводи

$$v_m(x), \quad T_{mn}(x) = \frac{\partial v_m(x)}{\partial x^n}, \tag{1.84}$$

[31] Elwin Bruno Christoffel (1829-1900), немачки математичар.

који чине тензор другог реда. Постављамо питање у каквом су они односу са истим вектором и изводима, али у другом (y) систему:

$$v_m(y), \quad T_{mn}(y) = \frac{\partial v_m(y)}{\partial y^n}. \tag{1.85}$$

Трансформације за тензор другог реда два пута коваријантан дају:

$$T_{mn}(y) = \frac{\partial x^r}{\partial y^m}\frac{\partial x^s}{\partial y^n}T_{rs}(x) = \frac{\partial x^r}{\partial y^m}\frac{\partial x^s}{\partial y^n}\frac{\partial v_r(x)}{\partial x^s}$$

$$= \frac{\partial x^r}{\partial y^m}\left(\frac{\partial x^s}{\partial y^n}\frac{\partial v_r(x)}{\partial x^s}\right) = \frac{\partial x^r}{\partial y^m}\frac{\partial v_r(x)}{\partial y^n}.$$

То је коваријантно трансформисани тензор (1.84) из првог система у други, а питање је да ли је он једнак тензору (1.85) у другом систему? Прво имамо:

$$T_{mn}(y) = \frac{\partial v_m(y)}{\partial y^n} = \frac{\partial}{\partial y^n}\left(\frac{\partial x^r}{\partial y^m}v_r(x)\right)$$

$$= \frac{\partial x^r}{\partial y^m}\frac{\partial v_r(x)}{\partial y^n} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial y^m \partial y^n}v_r(x),$$

$$T_{mn}(y) = \frac{\partial x^r}{\partial y^m}\frac{\partial v_r(x)}{\partial y^n} + \Gamma^r_{mn}v_r(x). \tag{1.86}$$

Други извод координате x^r по координатама y^m и y^n, који се означава са Γ^r_{mn}, назива се *Кристофелов симбол*. Дакле, тензори из постављеног питања нису једнаки.

Зато се у тензорском рачуну дефинише *коваријантна деривација*:

$$T_{mn}(y) = \nabla_n v_m = \frac{\partial v_m}{\partial y^n} + \Gamma^r_{mn}v_r(x). \tag{1.87}$$

Тако за два индекса имамо коваријантну деривацију:

$$\nabla_p T_{mn} = \frac{\partial T_{mn}}{\partial y^p} + \Gamma^r_{pm}T_{rn} + \Gamma^r_{pn}T_{mr}, \tag{1.88}$$

Она примењена на метрички тензор у равном простору даје нулу, $\nabla_r g_{mn}(x) = 0$, што значи да у сваком другом простору коваријантна деривација метричког тензора даје нулу. Отуда

$$\frac{\partial g_{mn}}{\partial y^p} + \Gamma^r_{pm}g_{rn} + \Gamma^r_{pn}g_{mr} = 0. \tag{1.89}$$

Комбинујући ову једначину са различитим индексима, на крају добијамо:

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta}\right), \tag{1.90}$$

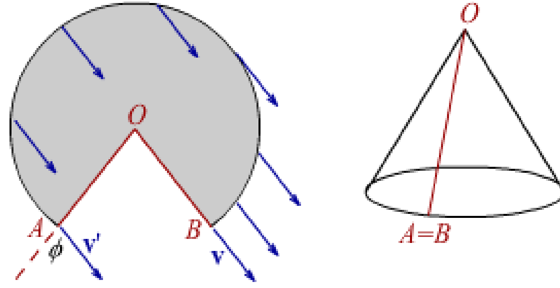
где је $g^{\alpha\beta}$ инверзна матрица матрице $g_{\alpha\beta}$, за коју важи $g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma$, при чему је

$$\delta^\alpha_\gamma = \begin{cases} 1, & \alpha = \gamma, \\ 0, & \alpha \neq \gamma, \end{cases} \tag{1.91}$$

Кронекеров[32] делта симбол. У свим овим једначинама подразумева се Ајнштајнова конвенција о сабирању по поновљеном горњем и доњем симболу.

Кристофелов симбол (1.90) назива се Кристофелов симбол друге врсте. Одговарајући Кристофелов симбол прве врсте добија се множењем овога са метричким тензором, а нити један није тензор јер се не трансформишу на тензорске начине (1.69). Кристофелови симболи су додаци за корекцију коваријантне деривације. Овде нам требају јер су они уграђени у Ричијев тензор кривине.

4. Ричијев тензор кривине $R_{\mu\nu}$ и скалар кривине R. Кривину простора ћемо покушати разумети помоћу купе. Када праву кружну купу изрежемо по једној изводници добићемо кружни исечак, као на слици 1.11.



Slika 1.11: Усправна кружна купа.

На равној мапи изводнице купе, на слици 1.11 лево, уочимо вектор $\mathbf{v}$ на правцу једне изводнице (OB) који затим транслирамо (паралелно померамо) по кружници базе купе око центра O до другог дела те изводнице (OA) у вектор $\mathbf{v}'$. Тај вектор ($\mathbf{v}'$) више не лежи на правцу изводнице, као њему полазни паралелан векор ($\mathbf{v}$). Угао између изводнице OA и вектора $\mathbf{v}$ је ϕ.

Унутрашња геометрија купе је развијена у мапу изводнице. Када паралелним померањем вектора, у оквиру унутрашње геометрије, по затвореној кружној линији добијемо описани поремећај паралелности, кажемо да је простор закривљен. Угао попут ϕ на датој слици је мера те закривљености.

За рад са кривинама простора корисни су *комутатори*:

$$[A, B] = AB - BA, \tag{1.92}$$

при чему су A и B неки оператори, пресликавања, међу које спада и паралелно померање вектора на цртежу купе. На пример, ако су $\hat{A} = \frac{\partial}{\partial x}$ и $\hat{B} = f(x)$ оператори

[32] Leopold Kronecker (1823-1891), немачки математичар.

који делују на скалар $\phi(x)$, први као извод по x кординати, а други као фактор, имаћемо:

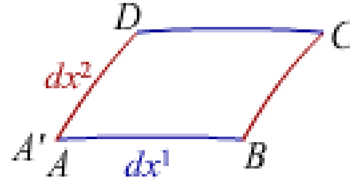
$$[\hat{A}, \hat{B}]\phi = \frac{\partial}{\partial x} f\phi - f\frac{\partial}{\partial x}\phi = \frac{\partial f}{\partial x}\phi + f\frac{\partial \phi}{\partial x} - f\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}\phi,$$

односно

$$[\frac{\partial}{\partial x}, f] = \frac{\partial f}{\partial x}, \tag{1.93}$$

јер скалар v не морамо наводити у овој операторској једначини. То је познати комутатор импулса и положаја из квантне механике.

Применимо то сада на пример приказан сликом 1.12. У једној координатној равни уочимо инфинитезимални паралелограм $ABCD$ који разапињу координате, рецимо dx^1 и dx^2, и неки вектор $\mathbf{v}_x$ који можемо паралелно померати.



Slika 1.12: Инфинитезимални паралелограм.

У теменима паралелограма вектор може узимати различите вредности, а разлика две такве вредности дефинише померање вектора између њих. Разлике померања по првој и другој координати су:

$$\left.\begin{array}{ll} (\mathbf{v}_C - \mathbf{v}_D) - (\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A), & \parallel dx^1, \\ (\mathbf{v}_C - \mathbf{v}_B) - (\mathbf{v}_D - \mathbf{v}_{A'}), & \parallel dx^2, \end{array}\right\} \tag{1.94}$$

где смо почетни и крајњи положај означили A и A' узимајући у обзир да вектор на почетку и на крају обиласка не мора бити исти. Разлика ових разлика је вектор резултат паралелног померања

$$d\mathbf{v} = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_{A'}, \tag{1.95}$$

који не мора бити нула вектор. У закривљеном простору ће се појавити разлика вектора $\mathbf{v}_A$ и $\mathbf{v}_{A'}$ не у дужини већ у углу, а тада је $d\mathbf{v} \ne 0$.

Обратимо пажњу на промену, рецимо у првој од претходних заграда

$$\mathbf{v}_C - \mathbf{v}_D = \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^\mu}\, dx^\mu\right) \cdot \mathbf{v} = \nabla_\mu dx^\mu \mathbf{v}. \tag{1.96}$$

То је градијент, или тачније, то је коваријантна деривација. Разлике (1.94) су:

$$\left.\begin{array}{l} (\mathbf{v}_C - \mathbf{v}_D) - (\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A) = \nabla_\nu dx^\nu\, \nabla_\mu dx^\mu\, \mathbf{v}, \\ (\mathbf{v}_C - \mathbf{v}_B) - (\mathbf{v}_D - \mathbf{v}_{A'}) = \nabla_\mu dx^\mu\, \nabla_\nu dx^\nu\, \mathbf{v}, \end{array}\right\} \tag{1.97}$$

па је њихова разлика

$$d\mathbf{v} = \nabla_\nu dx^\nu \, \nabla_\mu dx^\mu \, \mathbf{v} - \nabla_\mu dx^\mu \, \nabla_\nu dx^\nu \, \mathbf{v}$$
$$= (\nabla_\nu \nabla_\mu - \nabla_\mu \nabla_\nu) \, dx^\mu dx^\nu \mathbf{v},$$

$$d\mathbf{v} = [\nabla_\nu, \nabla_\mu] \, dx^\mu dx^\nu \mathbf{v}. \tag{1.98}$$

Међутим, коваријантна деривација (1.87) је обична деривација $\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu}$ плус гама члан Γ_ν који је корективни члан који се зове Кристофелов симбол. На основу тога, за комутатор добијамо:

$$[\nabla_\nu, \nabla_\mu] = (\partial_\nu + \Gamma_\nu)(\partial_\mu + \Gamma_\mu) - (\partial_\mu + \Gamma_\mu)(\partial_\nu + \Gamma_\nu)$$
$$= (\partial_\nu \partial_\mu + \partial_\nu \Gamma_\mu + \Gamma_\nu \partial_\mu + \Gamma_\nu \Gamma_\mu) - (\partial_\mu \partial_\nu + \partial_\mu \Gamma_\nu + \Gamma_\mu \partial_\nu + \Gamma_\mu \Gamma_\nu),$$

$$[\nabla_\nu, \nabla_\mu] = -[\partial_\mu, \Gamma_\nu] + [\partial_\nu, \Gamma_\mu] + [\Gamma_\nu, \Gamma_\mu]. \tag{1.99}$$

Како је:

$$[\partial_\mu, \Gamma_\nu] = \frac{\partial \Gamma_\nu}{\partial x^\mu}, \quad [\partial_\nu, \Gamma_\mu] = \frac{\partial \Gamma_\mu}{\partial x^\nu}, \tag{1.100}$$

то читав израз (1.99) постаје Риманов[33] тензор $R^\alpha_{\mu\beta\nu}$ тензор:

$$R^l_{\mu l \nu} = \frac{\partial \Gamma^l_{\mu\nu}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^l_{\mu l}}{\partial x^\nu} + \Gamma^k_{\mu\nu} \Gamma^l_{kl} - \Gamma^k_{\mu l} \Gamma^l_{k\nu} = R_{\mu\nu}, \tag{1.101}$$

контрахован по индексима α и β који се такав назива Ричијев тензор. Као што смо видели на почетку, тај тензор је први сабирак у Ајнштајновој једначини поља.

Ми смо сада добили (1.98) у облику

$$d\mathbf{v} = R_{\mu\nu} \, dx^\mu dx^\nu \mathbf{v}, \tag{1.102}$$

са Ричијевим тензором (1.101) који се састоји од Кристофелових симбола (1.90) који садрже метрички тензор и његове деривације. Метрички тензор је корекција Питагорине теореме. Из Ричијевог тензора $R_{\mu\nu} \to R$ можемо извести скалар кривине који је „траг“ Ричијевог тензора[34]:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \tag{1.103}$$

Поента ове приче је да скалар R није нула ако простор није раван.

5. Тензор енергије импулса $T_{\mu\nu}$. Најкраћа растојања између два догађаја у гравитационом пољу налазе се на *геодезијским линијама* Аналогно, на сфери је најкраће растојање између две тачке путем највеће кружнице, која садржи центар сфере и те две тачке. Геодезијске линије сфере су велике кружнице лопте.

[33]Bernhard Riemann (1826-1866), немачки математичар.

[34]Зато се $R_{\mu\nu}$ назива и Ричијев тензор кривине.

Сопствено време је оно које осећа посматрач који мирује у датом систему. Означимо га са τ. *Тангентни вектор* је количник пута и времена $dx^\mu/d\tau$, а промена, коваријантна деривација тог тангентног вектора путем геодезијске линије мора бити нула. Отуда и користећи (1.87), имамо:

$$\nabla \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau} + \Gamma(..) = 0. \tag{1.104}$$

Први члан ове једначине је убрзање:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau} = \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial\tau^2}, \tag{1.105}$$

које је једнако $-\Gamma$.

Према Њутновом закону $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, сила је маса (m) пута убрзање ($\mathbf{a}$), одакле следи да је убрзање количник силе и масе $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$. Упоређено са тиме, Кристофелов симбол је еквивалент силе. У Њутновом пољу, у пољу слабе силе и малих брзина, у изразу (1.90):

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta}\right), \tag{1.106}$$

први коефицијент $g^{\alpha\beta}$ постаје један, а деривације осталих постају веома мале, осим једног изузетка, временског члана g_{00}. Једини сабирак у загради (1.106) који може имати неки значај је $\frac{\partial g_{00}}{\partial x}$. Према томе, Кристофелов симбол се у слабом гравитационом пољу своди на

$$\Gamma = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x}, \tag{1.107}$$

што је еквивалент силе F, компоненте вектора силе пројектоване на једну (овде x) координату. Међутим, у Њутновој механици је сила негативни извод потенцијала:

$$F = -\frac{d\phi}{dx}. \tag{1.108}$$

Предзнак минус значи да сила и правац деловања имају супротне смерове.

На пример, гравитационо убрзање на површини Земље је $g = 9,8\ \mathrm{m/s}^2$, па је потенцијал $\phi = -mgx$ где је x висина тела масе m изнад тла, па је сила по правцу горе-доле $F = -d\phi/dx = -mg$. Како се висина x мери према горе, тако гравитациона сила има супротан смер.

Дакле, имамо (1.107), (1.108) и $\Gamma = F$, а отуда следи

$$g_{00} = 2\phi + \mathrm{const.} \tag{1.109}$$

У три димензије, силу уместо (1.108) пишемо помоћу (вектора) дивергенције:

$$\mathbf{F} = -\nabla\phi, \quad \nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z). \tag{1.110}$$

Такође, знамо да је Њутнова сила

$$F = -\frac{GMm}{r^2}, \tag{1.111}$$

где је G гравитациона константа, в. (1.22), а M и m масе тела које се привлаче на удаљености r. Посебно, гравитациона сила тела масе M на тело јединичне масе $m = 1$ које се налази на сфери S полупречника r износи $F = -GM/r^2$. Укупна сила таквих јединичних маса распоређених по сфери биће:

$$\int_S F\,dS = \int_S -\frac{GM}{r^2}\,dS = -\frac{GM}{r^2}\,4\pi r^2 = -GM4\pi, \tag{1.112}$$

где је dS инфинитезимална површина сфере.

Према теореми дивергенције је флукс (ток) поља кроз затворену површину око поља једнак укупној дивергенцији поља у запремини затвореној површином. Другим речима

$$\int_S F\,dS = \int_V \nabla F\,dV, \tag{1.113}$$

где је V запремина унутар затворене површине S, а dV и dS су инфинитезимални елементи запремине и површине. Густина (ρ) је маса подељена запремином, па је маса интеграл густине по запремини, редом:

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad m = \int_V \rho\,dV. \tag{1.114}$$

Укратко, овде имамо:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{F} = -\nabla\phi, & \nabla\mathbf{F} = -4\pi G\rho, \\ \nabla - \nabla\phi = -4\pi G\rho, & \nabla^2\phi = 4\pi G\rho, \\ g_{00} = 2\phi + \text{ const}, & \phi = \frac{1}{2}g_{00}, \end{array}\right\} \tag{1.115}$$

а одатле $\nabla^2\frac{1}{2}g_{00} = 4\pi G\rho$, односно

$$\nabla^2 g_{00} = 8\pi G\rho. \tag{1.116}$$

Ово није тензорска једначина па уместо ње пишемо тензорску

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \tag{1.117}$$

где је количник c^4 додат због изједначавања мерних јединица. То су Ајнштајнове једначине поља (1.25).

Приметимо да се густина ρ може поопштили, редом на вектор:

$$\rho \to m\left(\frac{x_0}{\tau}, \frac{x_1}{\tau}, \frac{x_2}{\tau}, \frac{x_3}{\tau}\right), \tag{1.118}$$

$$\rho \to (mc^2, mv_x, mv_y, mv_z), \tag{1.119}$$

а да затим на матрицу енергије-импулса (4×4):

$$\rho \to (T_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} T_{00} & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ T_{10} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{30} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}. \tag{1.120}$$

Прва компонента ове матрице, горе лево (T_{00}), је временска компонента и она представља први члан вектора (1.119) односно енергију. У првом реду, последње три компоненте (T_{01}, T_{02}, T_{03}) су ток енергије на просторне координате. У првој колони, доње три компоненте (T_{10}, T_{20}, T_{30}) су утицај импулса на енергију, остали чланови (T_{jk} за $j, k = 1, 2, 3$) представљају утицај импулса координате j на k.

Зашто је ово поопштавање $\rho \to T_{\mu\nu}$ могуће? Зато што је количник енергије (E) и запремине (V) једнак количнику рада (W) и запремине, рад је дејство силе (F) на путу L, а запремина је куб дужине, па то је количнк силе и површине S:

$$\frac{E}{V} = \frac{W}{V} = \frac{FL}{L^3} = \frac{F}{L^2} = \frac{F}{S} = P, \tag{1.121}$$

а ово на крају је притисак P. Тензор $T_{\mu\nu}$ је тензор притиска или стреса. Неке од његових компоненти су дупликати.

Према томе, на десној страни Ајнштајнове једначине (1.117) је маса. Анштајн је сматрао да маса узрокује поремећај простора, геометријско закривљење, чија мера је Ричијев тензор (1.101). Зато би на левој страни његове требало да стоји Ричијев тензор, али је у (углавном) статичном пољу промена енергије нула ($\partial T_{\mu\nu} = 0$), док таква промена Ричијевог тензора није нула ($\partial R_{\mu\nu} \ne 0$). Дакле, како је на десној страни коваријантна деривација $\nabla T_{\mu\nu} = 0$, потребно је да и на левој страни (1.117) буде $\nabla G_{\mu\nu} = 0$.

Ајнштајн је затим нашао за коваријантну деривацију Ричијевог тензора

$$\nabla R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\nabla g_{\mu\nu} R, \tag{1.122}$$

где је R скалар кривине (1.103). При томе, знамо да је коваријантна деривација метричког тензора нула:

$$\nabla g_{\mu\nu} = 0. \tag{1.123}$$

Отуда:

$$\nabla(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu}) = 0, \tag{1.124}$$

где је ламбда произвољна константа (интегрирања). Зато је он на леву страну своје једначине ставио (Ајнштајнов) тензор

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu}, \tag{1.125}$$

прво узимајући $\Lambda = 0$, а затим дозвољавајући да то ламбда, које је назвао космолошка константа, буде неки мали број. Он је сматрао да Λ може бити неки баланс који гура материју Свемира једну од друге и тако спречава њен колапс. Након Хабловог открића, да се галаксије удаљавају, претпостављајући да је почетак Свемира била нека иницијална експлозија (*Big Beng*) након које се Свемир ширио успоравајући, Ајнштајн је сматрао да његовим једначинама гравитациона константа више није потребна.

И то је то! Овде треба само додати да се идеја кривине простора која генерише гравитационо поље може једнако свести на идеју ентропије која чини то исто. То остављам да читаоц примети сам.

На крају сам потражио и на интернету нашао један прилично једноставан, задовољавајући видео прилог[35] са којим сам делом ускладио излагање ове тешке теорије (релативности). Надам се да ће и то помоћи разумевању овог прилога.

1.7 Закључак

Из принципа вероватноће, да се вероватнији догађаји чешће реализују, следи да се ентропија (мера нереда система) спонтано повећава. Отуда и други закон термодинамике, да топлота спонтано прелази са тела веће на тело мање температуре. Међутим и тело које се кретало једнолико праволинијски (специјална теорија релативности) претвара своју кинетичку енергију у топлотну (након чега делује други закон термодинамике), па ми овде изводимо закључак да је оно могло (а затим и морало) бити у стању мање ентропије. Ето зашто имамо закон инерције; зато што тело не може спонтано прећи из стања мировања (једног инерцијалног система) у кретање (у инерцијални систем који се креће другом брзином).

Да би се поткрепило ово поопштење ентропије (на физику тела изван термодинамике), доказујемо да у неинерцијалним системима није довољна једна димензија времена. Има их најмање три! Неинерцијални системи су такође поопштени на оне у којима се осећа дејство (неке, било које) силе. Тако, (апстраховано од других утицаја) свако тело у слободном паду у гравитационом пољу (па чак и сателит који кружи около), налази се у инерцијалном кретању - када је оно у стању константне ентропије.

Гравитациона сила је заправо тежња против смањења ентропије, коју би имало дато тело у јачем гравитационом пољу (ближе Земљи), ако би се тамо нашло а без повећања брзине. Такође, далеке галаксије које видимо телескопима су из прошлости Свемира у стању веће густине и опет, мање ентропије. У нашем окружењу се стално повећава ентропија, која је све мања што гледамо даље у „дубине“ свемира. Кажем наводне дубине, јер оно што бисмо можда могли видети (у сваком правцу) био би његов пра-почетак (*Big Beng*).

Са друге стране, опет из принципа вероватноће следи, време настаје порастом ентропије. Догађаји иду са мање на више вероватне, ослобађајући неизвесност, претварајући је у информацију која чини скуп онога што називамо садашњост. Када би стао укупни, збирни раст ентропије, стало би време. У систему где време иде спорије, мања је ентропија, тачније речено она заостаје, њен раст је спорији. Тада се са становишта посматрача чије време иде брже не реализују највероватнији догађаји, односно нема довољне производње времена! Зато инерцијалном систему у једноликом праволинијском кретању, у односу на нас у релативном мировању, време иде спорије. Зато све јаче гравитационо поље све више успорава време. Оба случаја имају мање ентропије.

[35] Einstein Field Equations - for beginners: `https://youtu.be/foRPKAKZWx8`

Bibliografija

[1] Растко Вуковић: *МАТЕМАТИЧКА ТЕОРИЈА ИНФОРМАЦИЈЕ И КОМУНИКАЦИЈЕ*, Друштво математичара Републике Српске, Бања Лука 1995.

[2] Растко Вуковић: *КОМПЛЕКСНЕ РОТАЦИЈЕ* - комплексни бројеви и ротације, Scribid.com[36], 8. март 2016.

[3] Растко Вуковић: *ИНФОРМАЦИЈА ПЕРЦЕПЦИЈЕ* - слобода, демократија и физика. Економски институт Бања Лука[37], јун 2016.

[4] Einstein, Albert (1916). "The Foundation of the General Theory of Relativity". Annalen der Physik[38] 354 (7): 769. Bibcode:1916AnP...354..769E. doi:10.1002/andp.19163540702. Archived from the original (PDF) on 2012-02-06.

[5] Sebastiano Sonego, Massimo Pin: *Deriving relativistic momentum and energy*, Università di Udine, Via delle Scienze 208, 33100 Udine[39], Italy, February 2, 2008

[36]Комплексне ротације: www.scribd.com/doc/303225970/

[37]Информација перцепције: https://archive.org/details/Informacija

[38]https://web.archive.org/web/20120206225139/http://www.alberteinstein.info/gallery/gtext3.html

[39]Deriving relativistic: https://arxiv.org/pdf/physics/0402024.pdf

Indeks